

Primljen / Received: 24.3.2017.

Ispravljen / Corrected: 10.7.2017.

Prihvaćen / Accepted: 2.11.2017.

Dostupno online / Available online: 10.12.2018.

Numerički i analitički model za granična stanja uporabljivosti elemenata

Autori:



Mr.sc. **Marija Docevska**, dipl.ing.građ.
Sveučilište Kiril i Metodij u Skopju
Građevinski fakultet
docevska.marija@yahoo.com



Prof.dr.sc. **Toni Arangjelovski**, dipl.ing.građ.
Sveučilište Kiril i Metodij u Skopju
Građevinski fakultet
arangjelovskitoni@gf.ukim.edu.mk



Prof.dr.sc. **Goran Markovski**, dipl.ing.građ.
Sveučilište Kiril i Metodij u Skopju
Građevinski fakultet
markovski@gf.ukim.edu.mk



Doc.dr.sc. **Darko Nakov**, dipl.ing.građ.
Sveučilište Kiril i Metodij u Skopju
Građevinski fakultet
nakov@gf.ukim.edu.mk

Prethodno priopćenje

Marija Docevska, Toni Arangjelovski, Goran Markovski, Darko Nakov

Numerički i analitički model za granična stanja uporabljivosti elemenata

Opisan je numerički i analitički model za predviđanje graničnih stanja uporabljivosti savojnih armiranobetonskih elemenata. Predmetni gredni elementi ispituju se pod kratkotrajnim i dugotrajnim savojnim opterećenjem. Numerički i analitički model provjeren je uporabom postojećih eksperimentalnih podataka. Obje analize daju pouzdanu procjenu progiba tijekom uporabe. Model višesmjernepokretne pukotine uključen je u numerički model kako bi se uzelo u obzir nelinearno ponašanje betona nakon stvaranja pukotina (raspucavanja). Za dugoročnu analizu u oba modela primjenjuju se vremenski ovisni učinci betona, puzanja i skupljanja kroz viskoelastično ponašanje betona.

Ključne riječi:

puzanje i skupljanje, dugotrajne deformacije, moment zakrivljenosti, razvoj pukotina, nosivost na vlak

Preliminary note

Marija Docevska, Toni Arangjelovski, Goran Markovski, Darko Nakov

Numerical and analytical model for serviceability limit states of RC elements

A numerical and analytical model for prediction of serviceability limit states of flexural reinforced concrete members is outlined. The considered beam elements are investigated under short-term and long-term bending load. The numerical and analytical model is validated using existing experimental data. Both analyses provide reliable estimation of in-service deflections. A multi-directional fixed crack model is included in the numerical model to account for the non-linear post-cracking behaviour of concrete. For long-term analysis, time-dependent effects of concrete, creep and shrinkage are employed in both models through viscoelastic concrete behaviour.

Key words:

creep and shrinkage, long-term deflections, moment-curvature, crack pattern, tension-stiffening

Vorherige Mitteilung

Marija Docevska, Toni Arangjelovski, Goran Markovski, Darko Nakov

Numerisches und analytisches Modell für Grenzzustände der Verwendbarkeit von verstärkten Elementen

Beschrieben wird das numerische und analytische Modell für die Vorhersage von Grenzzuständen der Verwendbarkeit von flexiblen Stahlbetonelementen. Das betreffende Balkenelement wird unter kurzzeitiger und langfristiger Biegebelastung getestet. Das numerische und analytische Modell wurde durch Anwendung vorhandener experimenteller Daten überprüft. Beide Analysen geben eine zuverlässige Einschätzung der Verbiegung während des Gebrauchs ab. Das Modell des mehrwegigen unbeweglichen Risses wird im numerischen Modell einbezogen, um das nicht lineare Verhalten des Betons nach Auftreten von Rissen (Spaltung) zu berücksichtigen. Für eine Langzeitanalyse bei beiden Modellen werden zeitabhängige Auswirkungen des Betons, Kriechen und Schrumpfen durch hochelastisches Verhalten des Betons, angewendet.

Schlüsselwörter:

Kriechen und Schrumpfen, langfristige Verformungen, Moment der Krümmung, Rissentwicklung, Zugtragfähigkeit

1. Uvod

U statičkom proračunu nekih elemenata osjetljivih na progib (kao što su grede i ploče) obično se najviše vodi računa o kontroli progiba i pukotina na razinama uporabnog opterećenja, a zbog čega je potrebno precizno modeliranje krutosti betona nakon raspucavanja. Zabilježeni su brojni slučajevi konstrukcija koje su bile u skladu sa zahtjevima graničnih stanja, ali su ipak bile zahvaćene prekomjernim progibima ili pukotinama. U mnogim je slučajevima utvrđeno da je glavni razlog za takve nedostatke taj što u fazi projektiranja puzanje i skupljanje nisu uzeti u obzir [1].

Kako bi se ispunili zahtjevi za uporabljivost, betonska konstrukcija mora obavljati svoju predviđenu funkciju tijekom cijelog svog radnog vijeka [1]. Stoga se moraju kontrolirati tri najčešća granična stanja uporabljivosti, tj. raspucavanje (pukotine), progib i razina naprezanja u betonu i armaturi.

U ovom je radu glavno težište na numeričkoj i analitičkoj analizi naprezanja i deformiranja, progibanja na sredini ploče i razvoja pukotina pri savijanju armiranobetonskih elemenata pod stalnim opterećenjem tijekom vremena. Autori prikazuju usporedbu numeričkih i analitičkih rezultata s postojećim eksperimentalnim podacima na različitim razinama pod kratkotrajnim stalnim opterećenjem i različitim razinama opterećenja.

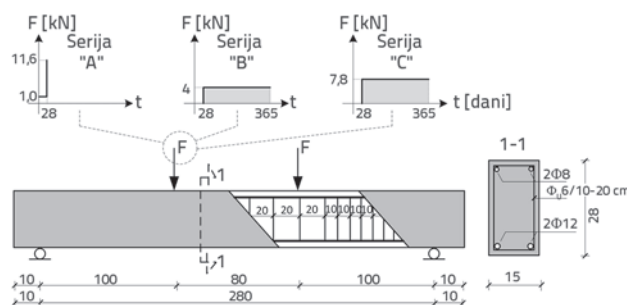
Pouzdan izračun graničnih stanja uporabljivosti armiranobetonskih elemenata vrlo često nije jednostavan. Ustvari, gotovo uvijek je opterećen poteškoćama s obzirom na procjenu nelinearnog ponašanja betona pod stalnim korisnim opterećenjem. Neki od najznačajnijih aspekata koji usložnjavaju ovaj izračun uključuju: nasumičnu raspodjelu vlačne čvrstoće betona duž elemenata, učinak puzanja i skupljanja, vremensku promjenu vlačne krutosti i promjenu modula elastičnosti betona tijekom vremena [2]. Neki od tih parametara ne mogu se uzeti u obzir postojećim analitičkim postupkom predloženim u normama pa je nužna primjena numeričkih modela.

Nužnost primjene numeričkog modela za predviđanje graničnih stanja uporabljivosti dodatno proizlazi iz inherentnog nasumičnog procesa razvoja pukotina, što komplicira predviđanje progiba. Na točno predviđanje progiba jako utječe mjesto i razmak pukotina, koji su analitički nepredvidivi zbog slučajnih čimbenika koji kontroliraju njihovo širenje [3].

Na primjer, rezultati postupaka proračuna pukotina koji su predloženi u Eurokodu 2 [4] i Model Code 2010 [5] daju samo najveću širinu pukotine w_m i maksimalni razmak pukotina s_m koji su dovoljni za procjenu stanja trajnosti, ali ne osiguravaju točno određivanje progiba osjetljivih konstrukcijskih elemenata. Osim toga, vizualni izgled uzorka (oblika) pukotine i reakcija (ponašanje) elementa mogu se dobiti samo numeričkom analizom pomoću FEM računalnih programa. Stoga je numerički model za predviđanje graničnih stanja uporabljivosti ne samo alternativna metoda u analitičkom smislu, već je u mnogim slučajevima zapravo i jedina metoda koja se može primijeniti.

2. Analizirani element

Za predviđanje vremenski ovisnog ponašanja armiranobetonskih greda pri različitim razinama stalnog opterećenja primijenjen je numerički i analitički model na referentnoj gredi koja je izrađena od betona razreda C30 / 37 i podvrgnuta savijanju u četiri točke. Ovi elementi eksperimentalno su ispitani u Zavodu za betonske konstrukcije Građevinskog fakulteta u Skoplju, Republika Makedonija [6]. Detaljni opis eksperimentalnog programa može se naći u [7]. Shema geometrije, armiranja i opterećenja prikazana je na slici 1., a svojstva materijala dobivena u eksperimentu i korištena u daljnjoj analizi sažeta su u tablici 1.



Slika 1. Geometrija, armatura i shema opterećenja za AB referentnu gredu

Tablica 1. Mehanička svojstva betona i armature

| | Beton | | | Armatura | |
|------------|----------------|----------------|----------------|-------------|------------------|
| Svojstvo | f_{ck} [MPa] | f_{ct} [MPa] | E_{cm} [MPa] | E_s [MPa] | σ_y [MPa] |
| Vrijednost | 31,90 | 2,90 | 30483 | 200100 | 400 |

Mehanička svojstva betona, tj. tlačna čvrstoća i vlačna čvrstoća cijepanjem, dobiveni su pri starosti betona od 40 dana na kontrolnim uzorcima u obliku kocke, dok je modul elastičnosti ispitivan pri istoj starosti betona na cilindričnim uzorcima pomoću hidraulične preše. Osim mehaničkih svojstava betona, modul elastičnosti armature i njezina granica popuštanja određeni su eksperimentalno. Odgovarajući rezultati prikazani su u tablici 1.

Analizirani elementi grede jednake geometrije razlikovali su se samo po vrsti opterećenja, kao što je prikazano na slici 1. Prema vrsti opterećenja, općenito su podijeljeni u dvije skupine. Prva skupina sastojala se od jedne serije greda "A", u kojoj su grede ispitivane pod kratkotrajnim uporabnim opterećenjem ($F_s = 11,6$ kN). Druga skupina sastojala se od dvije serije greda "B" i "C". Grede iz te skupine podvrgnute su dugotrajnom opterećenju tijekom jednogodišnjeg razdoblja. Intenzitet stalnog opterećenja u seriji greda "B" ($F_g = 4$ kN) predstavljao je 34 % uporabnog opterećenja ($F_s = 11,6$ kN) i bio je manji od opterećenja koje je proizvelo prvu pukotinu. Intenzitet opterećenja u seriji greda "C" ($F_g + q / 2 = 7,8$ kN) iznosio je 67 % uporabnog opterećenja i proizveo je pukotine odmah nakon opterećenja.

3. Analitički model

3.1. Stanje naprezanja i deformacije

Primijenjena je dobro poznata Bažantova *Age-Adjusted Effective Modulus metoda* (AAEMM) za predviđanje vremenski ovisnih učinaka betona pod stalnim opterećenjem.

Uz poznati koeficijent puzanja, deformacije od skupljanja betona i koeficijent starosti (betona), te pri stalnim uvjetima okoliša, ovaj algebarski odnos omogućuje izračun deformacija i naprezanja u betonu u bilo koje vrijeme t . Ovdje se navodi sedam osnovnih jednadžbi za izračun deformacija i naprezanja u betonu i u armaturi tijekom vremena [8]. Te se jednadžbe mogu primjenjivati za elemente s pukotinama (raspucane) i one bez pukotina (neraspucane) uzimajući u obzir reakcijsko područje betona. Deformacije i naprezanje u većini tlačno opterećenih betonskih vlakana kod početnog vremena t_0 :

$$\sigma_c(t_0) = \frac{N_i}{A_i} + \frac{M_i}{I_i} \cdot y_i \quad (1)$$

$$\varepsilon_c(t_0) = \varepsilon_{centroid}(t_0) + \frac{1}{r(t_0)} \cdot y_c \quad (2)$$

Vlačno i tlačno naprezanje armature kod početnog vremena t_0 :

$$\sigma_s(t_0) = n \cdot \sigma_c(t_0) = \frac{E_s}{E_c} \cdot \sigma_c(t_0) \quad (3)$$

Deformacije i naprezanje u većini tlačno opterećenih betonskih vlakana kod završnog vremena t :

$$\sigma_c(t) = \sigma_c(t_0) + \Delta\sigma_c(t) = \sigma_c(t_0) + \left[- \left(\frac{N_i^*}{A_i^*} + \frac{M_i^*}{I_i^*} \cdot y_i^* \right) \right] \quad (4)$$

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \Delta\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \Delta\varepsilon_{centroid}(t) + \frac{1}{\Delta r(t)} \cdot y_c \quad (5)$$

Vlačno i tlačno naprezanje armature kod završnog vremena t :

$$\sigma_s(t) = \sigma_s(t_0) + \Delta\sigma_s(t) = \sigma_s(t_0) + \left[- \left(n^* \left(\frac{N_i^*}{A_i^*} + \frac{M_i^*}{I_i^*} \cdot y_i^* \right) + \frac{N_s^*}{A_s^*} + \frac{M_s^*}{I_s^*} \cdot y_s^* \right) \right] \quad (6)$$

$$n^* = \frac{E_s}{E_c} = \frac{E_s}{E_c(t_0)} \cdot (1 + \chi(t, t_0) \cdot \phi(t, t_0)) \quad (7)$$

Oznake u izrazima prema [8] znače.

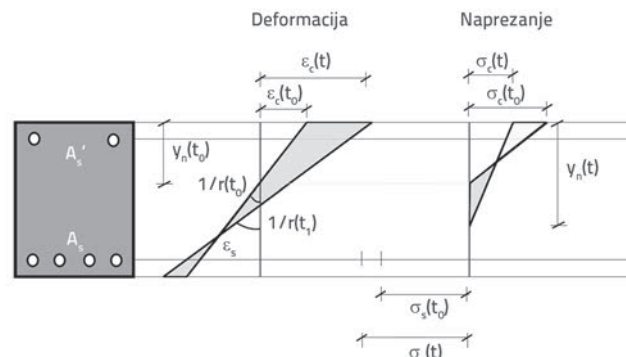
- M_i i N_i - moment savijanja i uzdužna osna sila, smanjena u težištu idealnog poprečnog presjeka
- A_i , I_i i y_i - geometrijska svojstva idealnog poprečnog presjeka
- $1/r(t_0)$ - zakrivljenost u početnom vremenu t_0
- M_i^* i N_i^* - utjecaji u idealnom starosno prilagođenom profilu
- A_i^* , I_i^* i y_i^* - geometrijska svojstva u idealnom starosno prilagođenom profilu
- $1/\Delta r(t)$ - promjena zakrivljenosti tijekom vremena t

M_s i N_s - moment savijanja i aksijalna sila u armaturi što proizlaze iz deformacija slobodnog neograničenog skupljanja i puzanja (aproksimacija: nema veze između betona i armaturnih šipki)

A_s , I_s i y_s - geometrijska svojstva armature

$\chi(t, t_0)$ - koeficijent starosti betona

$\phi(t, t_0)$ - koeficijent puzanja.



Slika 2. Razvoj naprezanja i deformacije u presjeku tijekom vremena ($t-t_0$) [2]

Kao što je prikazano na slici 2., učinci puzanja i skupljanja utječu na naprezanja i deformacije u betonu i stoga i u ugrađenoj armaturi, zbog čega ih se ne smije zanemariti. Njihovi utjecaji tijekom vremena dovode do povećanja zakrivljenosti i pada neutralne osi prema donjoj armaturi (slika 2.).

3.2. Trenutačni i vremenski ovisni progibi

Opći postupak izračuna kratkotrajnih progiba uključuje dvostruku integraciju srednje zakrivljenosti po duljini elementa. Mora se upotrijebiti srednja zakrivljenost, naročito pri izračunu raspucanih elemenata, zbog promjene zakrivljenosti u dijelu između dvije pukotine kao posljedice raspodjele naprezanja prijanjanja uzduž šipki. Ovdje se primjenjuje Simpsonovo pravilo za integraciju umnoška srednje zakrivljenosti $k_{s,m}$ i trenutačnog momenta savijanja uzduž elementa, što izravno rezultira progibom u željenom dijelu (izraz 8) [11]:

$$a = \int_0^l k_{s,m}(t) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx \quad (8)$$

Progib armiranobetonskog elementa pod stalnim opterećenjem povećava se s vremenom kao posljedica triju glavnih učinaka [1]:

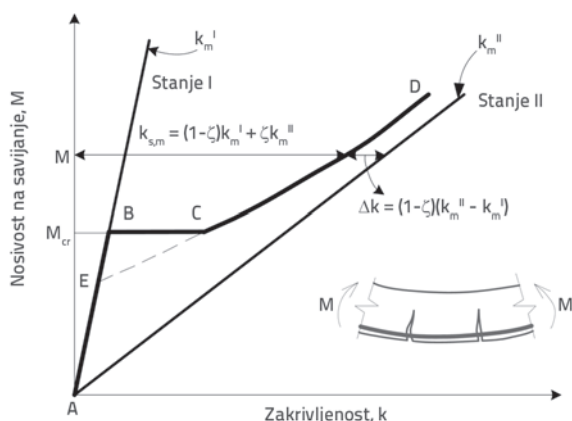
- o vremenu ovisnog raspucavanja
- smanjenja vlačne krutosti $\Delta\delta$ tijekom vremena ($\Delta\delta$ se smanjuje tijekom vremena)
- povećanja zakrivljenosti u svakom presjeku tijekom vremena uslijed puzanja i skupljanja betona.

Beebly, Scott i Gilbert [9] pokazali su da se vlačna krutost tijekom vremena smanjuje pod stalnim opterećenjem, što je vjerojatno posljedica kombiniranih učinaka vlakna uzrokovano

puzanjem i skupljanjem uzrokovanog mikropukotinama oko čeličnih šipki.

Gotovo svaka norma eksplicitno ili implicitno uzima u obzir ovaj dugotrajni učinak vlačne krutosti, ali nijedan ne daje vremensku skalu za gubitak korisnih učinaka vlačne krutosti. Ovo se mora uzeti u obzir kako bi se dobila točna procjena gubitka korisnih učinaka vlačne krutosti [10].

Opisani postupak može se upotrijebiti, uz neke modifikacije, za izračun dugotrajnog progiba. Metoda uključuje procjenu prosječne zakrivljenosti tijekom promatranog vremena t , kao zbroj početne zakrivljenosti i povećanja zakrivljenosti zbog vremenski ovisnih učinaka, tj. puzanja i skupljanja. Ovdje se ti učinci primjenjuju kroz tzv. koeficijente armature k_s , puzanja k_ϕ i zakrivljenosti k_{cs} [12]. Bilinearna interpolacijska metoda također se koristi za izračun prisutnosti pukotina u betonu, tj. za izračun učinka vlačne krutosti kroz koeficijent raspodjele ζ , kako je predloženo u Eurokodu 2 (9) (slika 3.).



Slika 3. Odnos momenta savijanja i zakrivljenosti pri savijanju [12]

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \tag{9}$$

gdje je $\beta_1 = 1,0$ za rebraste šipke i $0,5$ za glatke (ravne) šipke; $\beta_2 = 1,0$ za pojedinačno kratkotrajno opterećenje i $0,5$ za ponovljeno ili stalno opterećenje; M_{cr} je moment u trenutku kad nastane prva pukotina, a M je moment u trenutku u kojem se promatra [4].

Ovaj je postupak relativno grub, jer ne uzima u obzir gubitak vlačne krutosti tijekom vremena – pojavu u betonu koja još nije uzeta u obzir u postupcima postojeće norme.

Čak i za najjednostavnije slučajeve, koji se susreću u tehničkoj praksi, potrebno je dvostruko integrirati zakrivljenost uzduž elementa kako bi se dobila pouzdana procjena progiba u uporabnom stanju. Zbog opsega i poteškoća u izračunu vezanim za ovaj postupak, izračuni progiba izvode se u gotovo svakom praktičnom slučaju prema jednom od pojednostavljenih postupaka predloženih u postojećim normama. Zbog svoje inherentne jednostavnosti, oni uključuju grube pretpostavke složenih djelovanja betona, kao što su raspucavanje (pukotine), vlačna krutost, puzanje i skupljanje. U mnogim praktičnim slučajevima te odredbe

o uporabljivosti neadekvatno i nekonzervativno modeliraju ponašanje betonskih konstrukcija u uporabi i stoga se moraju koristiti s oprezom.

Uobičajeni pristup za izračun progiba u propisima (ACI, AS3600, itd.) uključuje dobro poznatu jednadžbu za stvarnu krutost koju je razvio Branson. Učinak vlačne krutosti u Bransonovom modelu jednostavno se primjenjuje pomoću prosječnog stvarnog momenta inercije danog empirijskom jednadžbom (10) [1]:

$$I_{ef} = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^m I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^m \right] I_{cr} \leq I_g \tag{10}$$

gdje je:

- M_{cr} - moment u trenutku nastanka pukotine (raspucavanja)
- M_a - najveći primijenjeni moment
- I_{ef} - stvarni moment inercije
- I_g - bruto moment inercije
- I_{cr} - moment inercije raspucanog dijela
- m - empirijski procijenjena vrijednost koja može biti u rasponu od 3 do 4 (za slabo armirane elemente preporučuje se vrijednost 4).

Trenutačni i dugotrajni progibi betonskih elemenata mogu se izračunati pomoću jednadžbi (11) i (12), kako je predloženo mnogim normama:

$$a_0 = K \frac{M}{E_c \cdot I_{ef}} L^2 \tag{11}$$

$$a_t = K_r \cdot \phi(t, t_0) \cdot a_0^g = \left(1 - 0.6 \frac{A'}{A} \right) \cdot \phi(t, t_0) \cdot a_0^g \tag{12}$$

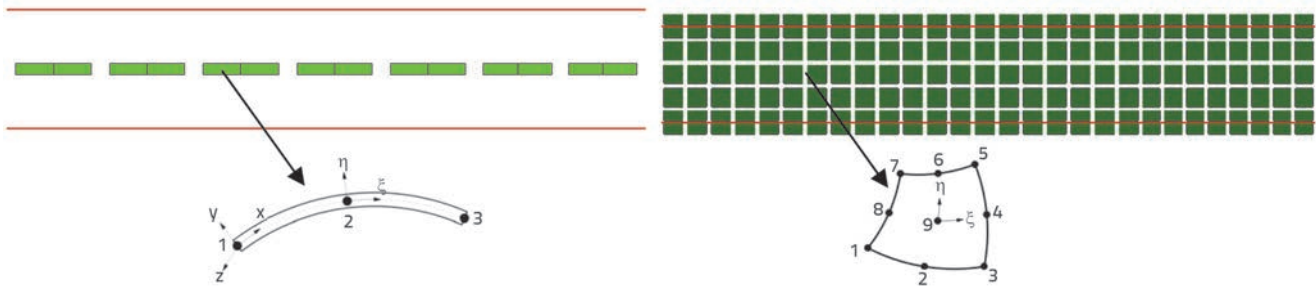
gdje je:

- K - koeficijent koji ovisi o rubnim uvjetima elementa i vrsti opterećenja
- M - maksimalni uporabni moment
- E_c - modul elastičnosti betona
- L - raspon elemenata
- K_r - empirijski koeficijent koji uzima u obzir korisni učinak tlačne armature na deformaciju od puzanja i skupljanja
- A'/A - omjer ploština tlačnog područja i armature
- $\phi(t, t_0)$ - koeficijent puzanja
- a_0^g - trenutačni progib uzrokovan stalnim opterećenjem.

Rezultati progiba referentne grede dobiveni tim jednadžbama bit će prikazani i detaljnije opisani u poglavlju 5.

4. Numerički model

Numerička analiza graničnih stanja uporabljivosti elemenata provedena je pomoću FEM računalnog programa DIANA - Verzija 9.4.3.



Slika 4. Matematički model s KE gredom (lijevo) i ravninski naprezanim KE (desno)

4.1. Matematički modeli

U analizi su primijenjena dva različita matematička modela: model konačnih elemenata grede (1D analiza) i model ravninskog stanja naprezanja (2D analiza) (slika 4.). U prvom matematičkom modelu primijenjeni su gredni elementi koji se sastoje od tri čvorova (CL9BE) na temelju Mindlin-Reissnerove teorije. Oni predstavljaju elemente koji su potpuno numerički integrirani preko njihovog poprečnog presjeka i uzduž njihove osi. Za integraciju tih elemenata uzduž njihove osi i njihova poprečnog presjeka korištena je Gaussova integracijska shema i Simpsonova integracija za dva čvorova i za devet čvorova. U drugom matematičkom modelu koristi se dvodimenzionalni četverokutni izoparametarski ravninski element s osam čvorova oko rubova elemenata i jednim u sredini (CQ18M) (slika 4.). U oba slučaja, tlačna i vlačna armatura modelirana je pomoću ugrađene tehnike modeliranja s posebnim elementima. Ti posebni elementi dodaju krutost elementima u koje su ugrađeni, tj. elementima poznatima kao *mother elements* (u ovom slučaju, betonski elementi) [13].

Fizička nelinearna analiza provedena je u računalnom programu DIANA 9.4.3 za ponašanje betona nakon raspucavanja. Glavni izvor nelinearnog ponašanja betona je uglavnom prisutnost pukotina. Za analizu elemenata u raspucanom stanju primijenjen je višegodišnji model nepokretne pukotine. Čini se da je taj model najprikladniji i najpovoljniji model raspucavanja za slučajeve savijanja. Za iterativno-inkrementalni postupak, tj. za točnu i brzu konvergenciju, primjenjena je uobičajena Newton-Raphsonova metoda. Optimalno povećanje opterećenja automatski je određeno u kombinaciji s kontrolom "Arc-length" i kriterijima konvergencije utemeljenima na energiji.

4.2. Višesmjerni model nepokretne pukotine

Budući da se pukotine u betonu pojavljuju na vrlo slučajaj način, preporučuje se pristup razmazanih pukotina putem višesmjernog modela nepokretne pukotine. Svaki razmazani model pukotine temelji se na razlaganju ukupne deformacije u elastičnu deformaciju i deformaciju pukotine, izraz (13), [14]. Primijenjeni višesmjerni model nepokretne pukotine nalazi se među najčešće korištenim i vrlo omiljenim modelima razmazanih pukotina. Njegova dodatna mogućnost uključuje modeliranje brojnih pukotina koje se pojavljuju istodobno, izraz (14), [14].

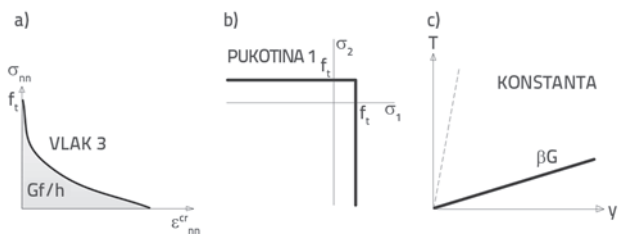
$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{cr} \tag{13}$$

$$\varepsilon^{cr} = \varepsilon^{cr} + \varepsilon_1^{cr} + \varepsilon_2^{cr} + \dots \tag{14}$$

gdje je:

- ε^{el} - elastična deformacija
- ε^{cr} - deformacije pukotine
- ε_1^{cr} - deformacija u pukotini broj 1
- ε_2^{cr} - deformacija u pukotini broj 2 kao posljedica pukotine 1, itd.

Model višesmerne nepokretne pukotine u Diana 9.4.3 definiran je kroz tri konkretne pojave: vlačno omekšavanje, prestanak vlaka i zadržavanje smicanja (slika 5.).



Slika 5. Krivulje korištene u numeričkom modelu za vlačno omekšavanje, prestanak vlaka i zadržavanje smicanja: a) Nelinearna krivulja omekšavanja; b) Prestanak stalnog vlaka; c) Zadržavanje stalnog smicanja

Ulazni podaci korišteni u računalnom programu DIANA 9.4.3 za definiranje ovih pojava prikazani su u tablici 2.

Tablica 2. Ulazni parametri za višesmjerni model nepokretne pukotine

| Parametri | Oznake u Diani | Ulazni podaci |
|------------------------------|----------------|------------------------------|
| Krivulja vlačnog omekšavanja | TENSIO 3 | Nelienarni (Moelands i sur.) |
| Energija loma | Gf | 0,06 N/mm |
| Širina pukotine | h | 50 mm |
| Prestanak vlaka | CRACK 1 | Stalan |
| Krivulja retencije smicanja | TAUCRI 1 | Stalan |
| Faktor retencije smicanja | β | 0,50 |

Krivulja vlačnog omekšavanja definirana je kroz dva specifična svojstva raspucalog betona: širinom pojasa pukotine h i energijom loma betona G_f . Širina pojasa pukotine u višesmjernom modelu pukotine obično se podudara s dimenzijom konačnog elementa (ovdje $h = a = 50$ mm), a predstavlja područje na kojem će se razviti pukotina [14]. Energija loma betona, definirana kao energija potrebna za širenje pukotine kroz jedinicu površine, ovdje je izračunana prema izrazu predloženom u Model Code 2010 i na njega utječe veličina agregata d_{max} (tablica 3.) i srednja tlačna čvrstoća betona f_{cm} , npr. izraz (15), [5].

$$G_f = G_{f_0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0.70} \tag{15}$$

gdje je:

G_{f_0} - osnovna vrijednost energije loma ovisna o veličini betonskog agregata (tablica 3.)

f_{cm0} - preporučena vrijednost konstante jednaka 10 MPa

f_{cm} - srednja tlačna čvrstoća betona.

Tablica 3. Osnovne vrijednosti energije loma G_{f_0} [Nmm/mm²]

| d_{max} [mm] | G_{f_0} [Nmm/mm ²] |
|----------------|----------------------------------|
| 8 | 0,025 |
| 16 | 0,030 |
| 32 | 0,058 |

Vremenski ovisni učinci betona, puzanja i skupljanja korišteni su u modelu kroz viskoelastično ponašanje betona. Viskoelastično ponašanje betona može se analizirati u računalnom programu DIANA putem Maxwelllova reološkog lanca, koji je definiran standardnim funkcijama puzanja predloženim u Model Code 1990

[14]. Puzanje i skupljanje primijenjeni su u vremenskim koracima na logaritamskoj skali za zadano razdoblje od jedne godine.

5. Rezultati analize

Numerički i analitički rezultati uspoređeni su s eksperimentalnim podacima. Rezultati vremenskih varijacija naprezanja i deformacija u betonu i armaturi, kratkotrajnih i dugotrajnih progiba i razvoj pukotina prikazat će se shematski.

5.1. Naprezanja i deformacije

Stanje tlačnog naprezanja u betonu σ_c , vlaka σ_s i tlaka σ_s u armaturi prikazani su u tablici 4. za skupinu greda podvrgnutih dugotrajnom opterećenju (serije "B" i "C"). Očito je da se naprezanje u većini tlačnih betonskih vlakana smanjuje tijekom vremena, a naprezanje u tlačno opterećenoj armaturi brzo povećava kao posljedica potrebne ravnoteže unutarnjih sila. Istodobno se može vidjeti neznatno povećanje naprezanja armature (tablica 4.).

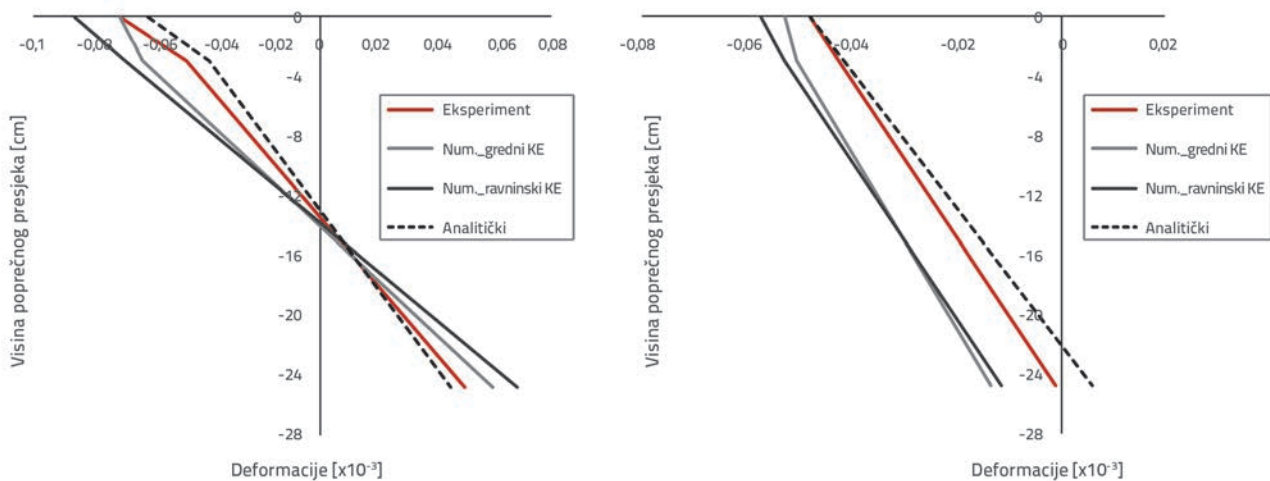
Prvi redak tablice 4., koji prikazuje eksperimentalno dobivena tlačna naprezanja u betonu ostaje neispunjen, jer se ta naprezanja ne mogu dobiti izravno iz izmjerenih naprezanja kao posljedica preraspodjele naprezanja u betonskom presjeku zbog učinaka puzanja i skupljanja. Međutim, tlačna i vlačna naprezanja armature mogu se dobiti izravno iz mjerenja deformacije.

Povećanje naprezanja u tlačnoj armaturi tijekom vremena može se zapaziti u oba slučaja, tj. za grede bez pukotina i za grede s pukotinama. U slučaju serije "B" (elementi bez pukotina), naprezanje u tlačnoj armaturi tijekom vremena ($t = 365$ dana) premašuje za gotovo deset puta naprezanje koje se opaža neposredno nakon primjene opterećenja. Ovo povećanje naprezanja manje je izraženo u slučaju serije "C" (elementi s pukotinama).

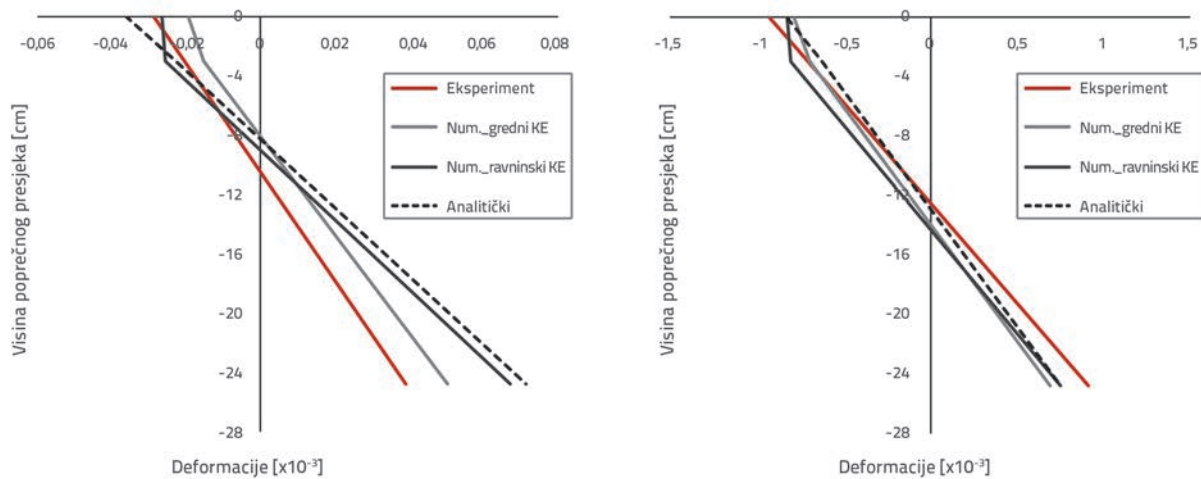
Tablica 4. Naprezanje u najjače pritisnutim betonskim vlaknima, vlak i tlak armature na početku ($t_0 = 28$ dana) i završnom vremenu ($t = 365$ dana) dobiveni eksperimentalno, numerički i analitički

| | | $t_0 = 28$ dana | | $t = 365$ dana | | | | $t_0 = 28$ dana | | $t = 365$ dana | | | | |
|------------------|------------------|-----------------|--------|------------------|------------------|------------------|-------|-----------------|--------|------------------|------------------|-------|-------|-------|
| Serija greda "B" | | | | Serija greda "C" | | | | | | | | | | |
| σ_c [MPa] | Eksperiment | | / | / | σ_c [MPa] | Eksperiment | | / | / | σ_c [MPa] | Eksperiment | | / | / |
| | Analitički model | | -1,91 | -1,55 | | Analitički model | | -6,87 | -3,45 | | Analitički model | | -6,87 | -3,45 |
| | Numerički model | Greda | -2,52 | -1,98 | | Numerički model | Greda | -8,01 | -4,52 | | Numerički model | Greda | -8,01 | -4,52 |
| P.St. | | -2,12 | -1,69 | P.St. | -5,81 | | -4,16 | P.St. | -5,81 | -4,16 | | | | |
| σ_s [MPa] | Eksperiment | | -9,40 | -85,2 | σ_s [MPa] | Eksperiment | | -41,20 | -140 | σ_s [MPa] | Eksperiment | | 77,88 | 182 |
| | Analitički model | | -10,30 | -93,50 | | Analitički model | | -23,70 | -156,9 | | Analitički model | | 147,5 | 151,9 |
| | Numerički model | Greda | -16,40 | -111 | | Numerički model | Greda | -51,5 | -161 | | Numerički model | Greda | 134 | 151 |
| P.St. | | -12,4 | -101 | P.St. | -30,7 | | -138 | P.St. | 101 | 138 | | | | |
| σ_s [MPa] | Eksperiment | | 10,0 | -2,40 | σ_s [MPa] | Eksperiment | | 77,88 | 182 | σ_s [MPa] | Eksperiment | | 77,88 | 182 |
| | Analitički model | | 9,51 | 12,50 | | Analitički model | | 147,5 | 151,9 | | Analitički model | | 147,5 | 151,9 |
| | Numerički model | Greda | 15,80 | -17,90 | | Numerički model | Greda | 134 | 151 | | Numerički model | Greda | 134 | 151 |
| P.St. | | 11,90 | -26,90 | P.St. | 101 | | 138 | P.St. | 101 | 138 | | | | |

*Objašnjenje: greda = numerički model s grednim konačnim elementima; P.St. = numerički model s ravninskim naprezanjem konačnih elemenata



Slika 6. Naprezanje po visini poprečnog presjeka greda serije "B" pri početnom vremenu t_0 (lijevo) i završnom vremenu $t = 365$ dana (desno)



Slika 7. Deformacija po visini poprečnog presjeka (greda serije "C") pri početnom vremenu t_0 (lijevo) i završnom vremenu $t = 365$ dana (desno)

Prema eksperimentalno i numerički dobivenim vrijednostima vlaka, može se primijetiti da, zbog potrebne ravnoteže unutarnjih sila, početni vlak u donjoj armaturi postaje tijekom vremena tlak u slučaju kada su grede neraspucale. Jedan od razloga za to može biti veća unutarnja rezultanta u betonu nastala djelovanjem puzanja i skupljanja, u usporedbi s rezultatama zbog samog vanjskog opterećenja. Ova promjena u donjoj armaturi također se može vidjeti na slici 5 koja prikazuje distribuciju deformacija u gredama "B". Nasuprot tome, donja armatura u gredama serije "C" ostaje vlačna tijekom cijelog analiziranog razdoblja od jedne godine.

Slike 6. i 7. prikazuju distribuciju naprezanja po visini poprečnog presjeka za seriju greda "B" i "C". Značajno povećanje tlačnih i vlačnih deformacija može se uočiti tijekom vremena ($t = 365$ dana) u oba stanja, tj. s pukotinama (greda "C") i bez pukotina (greda "B"), što rezultira spuštanjem neutralne osi prema donjoj armaturi. U slučaju grede serije "B" uočava se veće spuštanje neutralne osi, što dovodi do većeg povećanja naprezanja u tlačnom dijelu betona. Za ove serije greda, analitički model

(opisan u 3.1.) predviđa veće naprezanje u oba materijala, konkretno u betonu i armaturi.

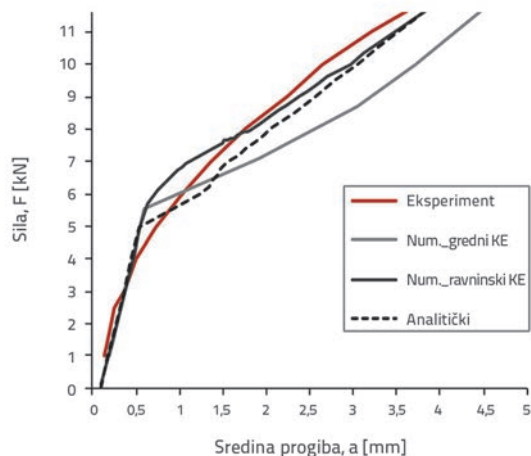
Manji pad neutralne osi može se zapaziti u gredama serije "C", što dovodi do manjeg povećanja deformacija u oba materijala tijekom vremena. Vidljivo je da je trenutačna deformacija u donjoj armaturi precijenjena u oba modela, numerički i analitički (slika 7., lijevo), ali u oba materijala je dobar odnos s izmjerenom trenutačnom deformacijom u najstlačenijem betonskom vlaknu, kao i s izmjerenim deformacijama u vremenu $t = 365$ dana (slika 7., desno).

5.2. Trenutačni i dugotrajni progibi

Usporedba analitičkih (baziranih na integraciji zakrivljenosti), numeričkih i eksperimentalnih krivulja opterećenje-progib prikazana je na slici 8. za seriju greda "A" izloženih uporabnom opterećenju $F_s = 11,60$ kN.

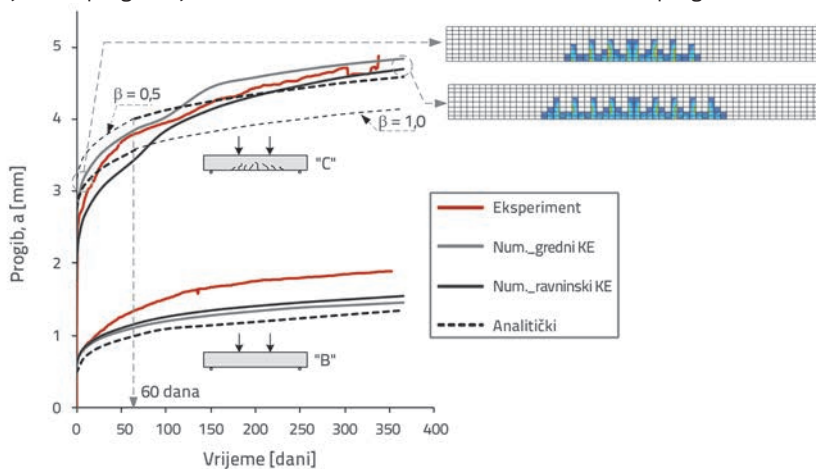
Kratkotrajni progibi (23,61 %) nakon momenta raspucavanja precijenjeni su u numeričkom modelu s konačnim grednim

elementima, a ta se precijenjenost povećava s povećanjem opterećenja. Korišteni analitički i numerički model s konačnim elementima ravninskog naprezanja malo precijenjuje ove progibe, ali pruža mnogo bolju sukladnost, s odstupanjima od 7,78 % 5,56 % u odnosu na eksperimentalne rezultate.



Slika 8. Usporedba kratkotrajnih progiba (grede serije „A“) dobivena je analitički, numerički i eksperimentalno

Na slici 9. prikazan je razvoj dugotrajnih progiba tijekom razdoblja od jedne godine. Slika istodobno prikazuje rezultate za obje serije grede (serija "B" – stanje bez pukotina i serija "C" – stanje s pukotinama) kako bi se pokazao utjecaj veličine stalnog opterećenja na dugotrajne progibe. Prema tome, može se primijetiti da se rezultati dobiveni numerički i analitički općenito slažu sa stvarnim vrijednostima progiba dobivenih eksperimentalno za obje grede. Dugotrajni progibi dobiveni za neraspucane elemente ("B"), kako se predviđa u analitičkim (baziranim na integraciji zakrivljenosti) i numeričkim modelima, vrlo su slični. Oba modela podcjenjuju stvarne progibe tijekom zadanog razdoblja od jedne godine. Analitički model pokazuje najveće odstupanje u smislu izmjerenih progiba, tj. 26,06 %.



Slika 9. Usporedba razvoja dugotrajnih progiba (grede serije "B" i "C") dobivenih analitički, numerički i eksperimentalno

Pukotine (raspucavanje) pri savijanju često se stvaraju tijekom stalnog uporabnog opterećenja i to najčešće između široko raspoređenih pukotina ili u prethodno neraspucanim područjima, čime se povećava opseg stvaranja pukotina (raspucavanja), slike 9. i 11. Ovo vremenski ovisno raspucavanje uzrokuje vremenski ovisni gubitak krutosti i povećanje progiba [1].

Korelacija između vremenski ovisnih pukotina uslijed savijanja i progiba shematski je prikazana na slici 8 za raspucane grede ("C"). Povećanje konačnog progiba može se opaziti zbog kombiniranih učinaka puzanja i skupljanja i posljedičnog stvaranja dodatnih vremenski ovisnih pukotina. Kod raspucanih elemenata ("C"), numerički modeli procjenjuju dugotrajni progib koji je u bliskoj podudarnosti sa stvarnim vrijednostima. Numerički predviđeni dugotrajni progibi grečnih elemenata i ravninskih elemenata odstupaju od izmjerenih za 0,82 % i 3,89 %. Analitički predviđeni dugotrajni progibi za raspucane elemente ("C"), temeljeni na integraciji zakrivljenosti, prikazani su na slici 9. s dvije crne isprekidane krivulje. Gornja predviđa razvoj dugotrajnih progiba, uzimajući u obzir smanjenje krutosti elemenata ili, preciznije, smanjenje učinka vlačne krutosti tijekom vremena ($\beta = 0,5$ u izrazu (9)). Donja krivulja prikazuje dugotrajna odstupanja ne uzimajući u obzir gubitak vlačne krutosti zbog stalnog opterećenja ($\beta = 1,0$ u izrazu (9)). Prema rezultatima objavljenim u literaturi [16], početna vrijednost vlačne krutosti smanjuje se za približno 50 % poslije 50 do 60 dana nakon prvog opterećenja. To upućuje na činjenicu da se dugotrajni progibi pod stalnim opterećenjem trebaju izračunati s dvije različite vrijednosti krutosti elemenata, budući da nikakve norme i preporuke ne uzimaju u obzir vremensku ovisnost učinka vlačne krutosti. U ovom su istraživanju dugotrajni progibi izračunani s početnom djelotvornom krutosti do 60. dana nakon prvog opterećenja i, od ove točke u vremenu, sa smanjenom krutosti zbog smanjenja učinka vlačne krutosti tijekom vremena ($\beta = 0,5$). Na taj način, konačni dugotrajni progib dobiven ovim postupkom izračuna odstupa za 6,35 % od izmjerene vrijednosti progiba.

Premda raspucali element ima veće konačne dugotrajne progibe, učinci puzanja i skupljanja imaju veći utjecaj u slučaju neraspucanog elementa. To se može pokazati omjerom između konačnog i trenutačnog progiba u oba slučaja. Izmjereni konačni - trenutačni omjer progiba (a_{365} / a_{28}) za seriju "B" (neraspucani) iznosi 3,84, a 2,54 za seriju "C" (raspucani). Ovo nije neočekivano, jer je samo neraspucani dio betona pod utjecajem puzanja i skupljanja [9].

Sažetak odstupanja numerički i analitički izračunanih kratkotrajnih i dugotrajnih odstupanja u smislu izmjerenih podataka prikazan je u tablici 5. Prikazani su i rezultati dobiveni postupkom pojednostavljenog kodiranja temeljenog na Bransonovom modelu. Budući da referentne grede imaju omjer armature

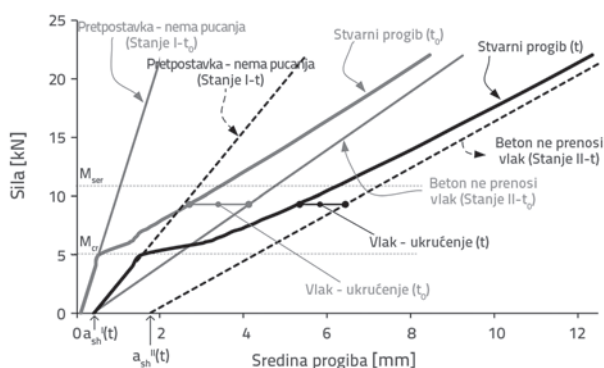
Tablica 5. Usporedba između izračunanih i izmjerenih trenutačnih i dugotrajnih progiba za serije greda A, B i C

| | | Serija "A" | | | Serija "B" | | | | | | Serija "C" | | | | | | | |
|------------------|--------|---|-------------------|----------|---|-------------------|---------------|-------------------|--------------------|-------------------|---|---------------|-------------------|---------------|-------------------|--------------------|-------------------|----------|
| | | $F_G = 11,60 \text{ kN}$ $t_0 = 28 \text{ dana}$ | | | $F_G = 4,00 \text{ kN}$ $t_0 = 365 \text{ dana}$ | | | | | | $F_{G+Q/2} = 7,80 \text{ kN}$ $t_0 = 365 \text{ dana}$ | | | | | | | |
| | | a_0 [mm] | Δ^* [%] | O/U | a_0 [mm] | Δ^* [%] | a_t [mm] | Δ^* [%] | a_t^{**} [mm] | Δ^* [%] | O/U | a_0 [mm] | Δ^* [%] | a_t [mm] | Δ^* [%] | a_t^{**} [mm] | Δ^* [%] | O/U |
| Eksperiment | | 3,60 | - | - | 0,490 | - | 1,88 | - | 1,39 | - | - | 1,925 | - | 4,88 | - | 2,95 | - | - |
| Numerički model | Greda | 4,45 | 23,61 | O | 0,460 | 6,12 | 1,46 | 22,34 | 1,00 | 28,06 | U | 2,34 | 21,56 | 4,84 | 0,82 | 2,50 | 15,40 | U |
| | PL St. | 3,80 | 5,56 | O | 0,463 | 5,51 | 1,55 | 17,55 | 1,09 | 21,58 | U | 1,77 | 8,05 | 4,69 | 3,89 | 2,92 | 1,18 | U |
| Analitički model | | 3,88 | 7,78 | O | 0,446 | 8,98 | 1,39 | 26,06 | 0,94 | 33,10 | U | 2,04 | 5,97 | 4,57 | 6,35 | 2,53 | 14,38 | U |
| Norma (m = 4) | | 4,63 | 28,61 | O | 0,480 | 2,04 | 1,22 | 35,11 | 0,74 | 46,76 | U | 2,32 | 20,52 | 5,85 | 19,88 | 3,53 | 21,15 | O |
| Norma (m = 3) | | 4,03 | 11,94 | O | 0,480 | 2,04 | 1,22 | 35,11 | 0,74 | 46,76 | U | 1,93 | 0,26 | 4,87 | 0,21 | 2,94 | 0,51 | U |

* $\Delta = (a_{\text{calc}} - a_{\text{exp}}) / a_{\text{exp}}$, ** $\Delta a_t = a_t - a_0$, **O** – precijenjenost, **U** – podcijenjenost

od 0,54 %, oni se u ovom pojednostavljenom postupku smatraju slabo armiranim elementima, pa je zato u jednadžbu uvedena potencija $m = 4$, izraz (10). Progibi dobiveni s primjenom potencije $m = 3$ prikazani su i u tablici 5. radi usporedbe.

U tablici 5., a_0 prikazuje kratkotrajni trenutačni progib, a a_t je dugotrajni konačni progib nakon jednogodišnje izloženosti stalnom opterećenju različite veličine. O vremenu ovisan progib uzrokovan puzanjem i skupljanjem označen kao Δ_{at} , jednak je razlici između konačnog dugotrajnog i trenutačnog progiba. Tablica 5. pokazuje kako je svaki rezultat unutar dopuštenog područja odstupanja 30 % od eksperimentalno dobivenih progiba, osim rezultata dobivenih pojednostavljenim analitičkim postupkom predloženim u postojećim normama. Maksimalno odstupanje tih rezultata javlja se u konačnom dugotrajnom progibu neraspucanih greda "B" i iznosi 35,11 %. Može se primijetiti da se dobije bolje predviđanje kratkotrajnih i dugotrajnih progiba s potencijom $m = 3$ u izrazu (10). Rezultati navedeni u tablici 5. pokazuju da svaki od primijenjenih modela precjenjuje kratkotrajne progibe za seriju "A", dok u gotovo svim slučajevima podcjenjuje dugotrajne progibe za grede "B" i "C".



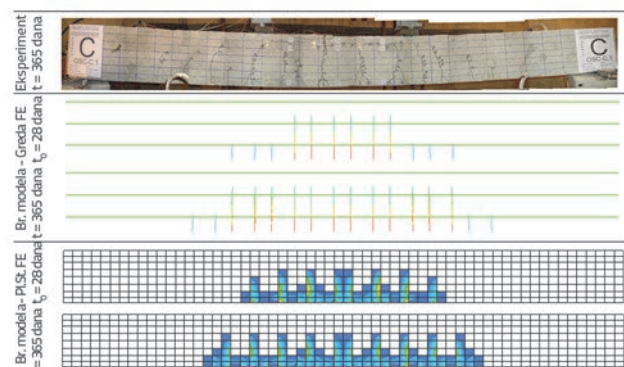
Slika 10. Djelovanje puzanja i skupljanja F – odnos poslije jedne godine stalnog opterećenja

Učinci puzanja i skupljanja na dugotrajni progib analiziranih greda prikazani su na slici 10. Siva krivulja prikazuje kratkotrajni

progib odmah nakon primjene opterećenja. Nakon promatranog razdoblja od jedne godine, ta se krivulja pomiče vodoravno i naginje se udesno kao posljedica istodobne akcije puzanja i skupljanja (crna krivulja). Sila (F) – progib (a) odnos tijekom vremena t (crna krivulja): element pokazuje početni pregib (označen kao $a_{sh}(t)$ na slici 10.), čak i kad je $M = 0 \text{ kNm}$, a to je zbog djelovanja skupljanja. Slika 10. prikazuje i smanjenje korisnih učinaka vlačne krutosti tijekom vremena za opterećenja veća od opterećenja raspucavanja. S porastom opterećenja to smanjenje postaje sve naglašenije (slika 10.).

5.3. Razvoj pukotina

Prikazana je usporedba brojčanih i eksperimentalno dobivenih uzoraka pukotina u gredama "C". Još uvijek nema analitičkog postupka za dobivanje lokacija pukotina i razvoj pukotina preko osi elementa. Slika 11. prikazuje razvoj pukotine u početku primjene tereta t_0 (28 dana) i u vremenu t (365 dana), iz čega se može uočiti vremenski ovisna narav raspucavanja. Neke se pukotine tijekom vremena razvijaju kroz visinu elementa, ali se pojavljuju i nove pukotine pod stalnim opterećenjem, šireći zonu raspucavanja prema osloncima elemenata (slika 11.).



Slika 11. Razvoj pukotine u gredi serije "C" u početnom vremenu t_0 i završnom vremenu t

Nažalost, računalni program DIANA 9.4.3 ne može eksplicitno prikazati širinu pukotine. Zato širine pukotine u ovim istraživanjima nisu uspoređivane.

6. Zaključak

Na referentnu gredu primijenjen je analitički i numerički model za predviđanje graničnog stanja uporabljivosti (SLS) armiranobetonskih savojnih elemenata. Rezultati dobiveni s obzirom na vremensku varijaciju naprezanja i deformacija, kratkotrajne i dugotrajne progibe i razvoj pukotina, uspoređeni su s postojećim eksperimentalnim podacima. Na temelju rezultata komparativne studije prikazane u ovom radu može se zaključiti sljedeće:

- Analitički i numerički model učinkovito uzima u obzir učinke puzanja i skupljanja, kao i prisutnost raspucavanja. Numerički modeli dodatno daju vizualni dojam o razvoju pukotina i uvid u lokalno ponašanje elementa.
- Analitički i numerički predviđeni progibi pokazuju razumno dobru sukladnost s eksperimentalnim podacima. U analitički dobivenim rezultatima zabilježeno je maksimalno odstupanje od 8,98 % za kratkotrajne i 26,06 % za dugotrajne progibe. Rezultati dobiveni numeričkim modelom s konačnim grednim elementima pokazuju odstupanja od 23,61 % za kratkotrajne progibe i 22,34 % za dugotrajne progibe. Nasuprot tome,

rezultati numeričkog modela s konačnim elementima za ravninsko stanje naprezanja pokazuju bolju sukladnost s eksperimentalnim podacima, s kratkotrajnim i dugotrajnim progibima od 8,05 % i 17,55 %. Odstupanja u oba modela s obzirom na eksperimentalne podatke unutar su dopuštenog raspona od 30 % [15].

- Veća podcijenjenost dugotrajnih progiba dobivena analitičkim modelom poglavito je posljedica grube pretpostavke gubitka vlačne krutosti tijekom vremena, uvedene samo koeficijentom $\beta_2 = 0,50$, izraz (9). Nastajanje novih vremenski ovisnih pukotina smanjuje korisne učinke vlačne krutosti i , posljedično, utječe na konačnu vrijednost dugotrajnih progiba. Zbog toga bi se ti učinci trebali detaljnije razmotriti kako bi se napravila pouzdana procjena vrijednosti dugotrajnih progiba.
- U slučajevima koji se obično susreću u inženjerskoj praksi, projektanti najčešće odabiru pojednostavljene propisane postupke temeljene na Bransonovom modelu za predviđanje progiba tijekom uporabe. Rezultati dobiveni ovim istraživanjem pokazuju da ti postupci uglavnom podcjenjuju stvarne progibe, upućuju na činjenicu da se preporučuju osjetljiviji analitički modeli koji se temelje na dvostrukoj integraciji zakrivljenosti, čak i u najjednostavnijim slučajevima u praksi.

LITERATURA

- [1] Gilbert, R.I.: Calculation of Long-Term Deflection, CIA Seminar – Control of Long-Term Deflection – Brisbane, 23 April 2008.
- [2] CEB Bulletin 235.: Serviceability Models, Behaviour and Modelling in Serviceability Limit States Including Repeated and Sustained Loads-Progress Report, Comite Euro-International du Beton (CEB), April 1997.
- [3] Jenkins, D.: Prediction of Cracking and Deflections; International Code Provisions and Recent Research.
- [4] EN 1992-1-1: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Building, 2004.
- [5] International Federation of Structural Concrete (FIB): fib Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst & Sohn, 2013.
- [6] Arangelovski, T.: Time-Dependent Behaviour of Reinforced High-Strength Concrete Elements under Action of Variable Loads, PhD dissertation, Faculty of Civil Engineering, Ss. Cyril and Methodius University, Skopje, September 2011.
- [7] Arangelovski, T., Markovski, G., Mark, P.: Influence of Repeated Variable Load on Long-Term Behavior of Concrete Elements, Journal of Civil Engineering and Architecture, USA, 8 (2014) 3 (Serial No. 76), pp. 302-314
- [8] Beton i armiran beton prema BAB 87 Priručnik, Beograd 1995.
- [9] Gilbert, R.I.: Time-Dependent Stiffness of Cracked Reinforced and Composite Concrete Slabs, Procedia Engineering, 57 (2013), pp. 19-34.
- [10] Scott, R.H., Beebly, A.W.: Long-Term Tension-Stiffening Effects in Concrete, ACI Structural Journals, 102 (2005) 1, pp. 31-39.
- [11] Zilch, K., Zehetmaier, G.: Bemessung im konstruktiven Betonbau nach DIN 1045-1 und EN 1992-1-1 (Eurocode 2)
- [12] Ghali, A., Favre, R., Eldbadry, M.: Concrete Structures: Stresses and Deformation – Third Edition, Spon Press, London 2002.
- [13] DIANA Release 9.4.3 User's Manual: Element Library, TNO DIANA
- [14] DIANA Release 9.4.3 User's Manual: Material Library, TNO DIANA
- [15] Chowdhury, S.H., Loo, Y.C.: A New Formula for Prediction of Crack Widths in Reinforced and Partially Prestressed Concrete Beams, Advances in Structural Engineering, 4 (2001) 2.
- [16] Beebly, A.W., Scott, R.H.: Mechanisms of Long-Term Decay of Tension Stiffening, Magazine of Concrete Research, 58 (2006) 05, pp. 255-266.