

Primljen / Received: 30.3.2017.
 Ispravljen / Corrected: 23.5.2017.
 Prihvaćen / Accepted: 26.7.2018.

Dostupno online / Available online: 25.10.2018.

Rješavanje vlastitih vrijednosti za lučne brane: računalni program ADAD-IZIIS

Autori:



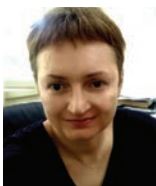
Prof.dr.sc. **Violeta Mircevska**, dipl.ing.građ.
 Sveučilište Ćirila i Metoda
 Institut za potresno inženjerstvo i seizmologiju
violeta@iziis.ukim.edu.mk



Dr.sc. **Miroslav Nastev**, dipl.ing.građ.
 Prirodni resursi Kanade
 Kanadsko geološko istraživanje
miroslav.nastev@canada.ca



Prof.dr.sc. **Viktor Hristovski**, dipl.ing.građ.
 Sveučilište Ćirila i Metoda
 Institut za potresno inženjerstvo i seizmologiju
viktor@iziis.ukim.edu.mk



Ivana Bulajic, dipl.ing.građ.
 Institut za rudarstvo Srbije
i.aleksov@gmail.com

Prethodno priopćenje

Violeta Mircevska, Miroslav Nastev, Viktor Hristovski, Ivana Bulajic

Rješavanje vlastitih vrijednosti za lučne brane: računalni program ADAD-IZIIS

Trodimenzionalne seizmičke analize složenih inženjerskih konstrukcija kao što su lučne brane temelje se na određivanju raspona vlastitih vrijednosti i odgovarajućih vlastitih vektora. Unatoč raznim praktičnim numeričkim rješenjima vlastite zadaće koja nalazimo u literaturi, utvrđeno je to da metoda iteracije u potprostoru nudi vremenski prihvatljiva i precizna rješenja vlastite zadaće, prikladna za velike sustave s visokim stupnjem slobode. U radu su predstavljena teorijska načela dobro poznate metode iteracije u potprostoru s implementacijom uz pomoć postojećega računalnog programa ADAD-IZIIS u analizi konačnih elemenata lučnih brana.

Ključne riječi:

lučna brana, rješenje vlastite zadaće, veliki sustavi, program ADAD-IZIIS

Preliminary report

Violeta Mircevska, Miroslav Nastev, Viktor Hristovski, Ivana Bulajic

Eigenvalue solution for arch dams: ADAD-IZIIS Software

3D earthquake analyses of complex engineering structures such as arch dams are based on the determination of a range of eigenvalues and associated eigenvectors. Despite the variety of practical numerical eigensolutions available in the literature, the method of subspace iteration was found to offer time efficient and accurate eigenvalue solutions appropriate for large systems with high degrees of freedom. This paper presents the theoretical principles of the well known subspace iteration method implemented in the existing ADAD-IZIIS software for finite-element analyses of arch dams.

Key words:

arch dam, eigenvalue solution, large systems, ADAD-IZIIS software

Vorherige Mitteilung

Violeta Mircevska, Miroslav Nastev, Viktor Hristovski, Ivana Bulajic

Lösung der eigenen Werte für Hafendämme: Computerprogramm ADAD-IZIIS

Die dreidimensionale seismische Analyse komplexer Ingenieurkonstruktionen wie Hafendämme beruht auf der Bestimmung der Bandbreite der eigenen Werte und der entsprechenden eigenen Vektoren. Trotz unterschiedlicher praktischer numerischer Lösungen der eigenen Aufgabe, die wir in der Literatur finden, wurde festgestellt, dass die Iterationsmethode im Subraum zeitlich akzeptable und präzise Lösungen der eigenen Aufgabe bietet, die für große Systeme mit einem hohen Freiheitsniveau geeignet sind. In dieser Abhandlung werden bei der Analyse der endgültigen Elemente der Hafendämme mithilfe des bestehenden Computerprogramms ADAD-IZIIS die theoretischen Grundsätze der bekannten Iterationsmethode im Subraum mit Implementierung vorgestellt.

Schlüsselwörter:

Hafendamm, Lösung der eigenen Aufgabe, große Systeme, Programm ADAD-IZIIS

1. Uvod

Vlastite vrijednosti i vlastiti vektori nerazdvojne su značajke bilo kojih modela inženjerskih konstrukcija. Ti parametri, koji se također spominju kao "modalni oblici i prirodne frekvencije", važne su dinamičke značajke konstrukcija. U mnogim slučajevima modalni oblici i prirodne frekvencije konstrukcija zapravo su osnova kriterija za projektiranje. Njihovo određivanje važno je:

- u postupku planiranja prije građenja radi preciznog seizmičkog projektiranja
- u razdoblju nakon gradnje u cilju dugoročnog praćenja seizmičkih svojstava konstrukcije, što uvelike pomaže inženjerima u njihovim naporima da poboljšaju sigurnost i održivost važnih građevina.

Osim toga, ažurirani parametri krutosti modela, koji se dobivaju uspoređivanjem izračunanih vlastitih vrijednosti s vrijednostima koje su izmjerene tijekom pokusa ambijentalnim ili forsiranim vibracijama, važni su za točnije definiranje trenutačnog stanja konstrukcije.

Vlastite vrijednosti i vlastiti vektori [1-3] koriste se za razne namjene u teorijskoj i primijenjenoj matematici. Vlastiti problemi koji se odnose na statičke i dinamičke analize konstrukcija od posebne su važnosti u građevinskoj praksi. Općenito, dinamičke analize konstrukcija mogu se temeljiti na metodi superpozicije oblika za linearne probleme ili na izravnoj integraciji jednadžbe dinamičkog kretanja za nelinearne probleme. Za primjenu bilo kojeg od tih postupaka potrebno je riješiti vlastiti problem. Složeni konstruktivni sustavi obično generiraju velike matrice pa zato nije praktično određivati sve vlastite vektore i vlastite vrijednosti koji bi teorijski mogli sudjelovati u odzivu konstrukcije. To je posebno važno u izračunavanju linearno elastičnoga dinamičkog odziva temeljenog na metodi superpozicije oblika. Ako znamo to da je kod krutih konstrukcija kao što su to gravitacijske brane samo prvih nekoliko vlastitih vrijednosti i odgovarajućih vlastitih vektora važno za seizmički odziv [4-8], potrebno je definirati optimalan broj oblika koji se trebaju uključiti u preciznu modalnu analizu. Taj optimalan broj ovisi o vrsti konstrukcije, vrsti dinamičkog opterećenja te o traženom stupnju točnosti. On treba zadovoljiti kriterij kumulativnoga stvarnog udjela mase većeg od 90 posto od ukupne mase konstrukcije. Optimalan broj oblika također ovisi o sadržaju frekvencija odabrane pobude.

Obično se za trodimenzionalne (3D) dinamičke analize velikih složenih fleksibilnih građevina kao što su to lučne brane treba odrediti veći broj vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora [9-13]. To je osobito potrebno kada primijenjena pobuda ima višu razinu spektralne gustoće snage i širok raspon dominantnih frekvencija Fourierova amplitudnog spektra.

Primjena metode izravne integracije u rješavanju dinamičkog pomaka brana od ključne je važnosti pri analizi nelinearnog ponašanja [11, 14-16]. U ovome slučaju rješenje vlastite zadaće neophodno je jer se metoda izravne integracije temelji na primjeni Rayleighova koncepta prigušenja. Rayleighovi

koeficijenti prigušenja, α i β , određeni su primjenom poznatih koeficijenata prigušenja u razdvojenome obliku, ξ_r , te odgovarajućih kružnih frekvencija, ω_r , odabranih kako bi se iskazala mogućnost raspršivanja energije u konstruktivnim sustavima. Za određeni spregnuti sustav brana – akumulacija – temelji Rayleighovim koeficijentima prigušenja iskazuju se ekvivalentni omjeri prigušenja kojima se može na točan način pokriti odgovarajući raspon relevantnih oblika (frekvencija). Djelotvornost raspršenja energije može se simulirati iskazivanjem ekvivalentnoga modalnog prigušenja u funkciji vlastitih vrijednosti sveukupnoga vlastitog prostora [17]. Nove se vrijednosti trebaju odabrati u slučajevima kada iskazivanje omjera djelotvornog prigušenja nije dovoljno precizno. Kako bi se riješio taj problem, Indrajit i dr. [17] predlažu iterativno rješenje za definiranje najprikladnijih vrijednosti a i b. Zato je određivanje šireg raspona vlastitih vrijednosti neophodno čak i kod nelinearnih dinamičkih analiza.

Cilj je ovog rada dati kritičan pregled najnovijih saznanja iz literature o dostupnim praktičnim numeričkim rješenjima vlastite zadaće te odabrati, provesti i testirati metodu koja je najprikladnija za velike sustave s velikim brojem stupnjeva slobode kroz postojeći računalni program ADAD-IZIIS za analizu lučnih brana metodom konačnih elemenata [18].

2. Metode rješavanja vlastite zadaće

Osnovni pojmovi i razmatranja vezana uz rješavanje tipičnih problema vlastite zadaće detaljno su prikazani u literaturi [1-3]. Standardno formulirana vlastita zadaća može se riješiti uz pomoć linearne jednadžbe sljedećeg oblika:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad (1)$$

gdje je x ne-nulti vektor koji zadovoljava gornju jednadžbu, dok je λ vlastita vrijednost pozitivno određene matrice A . Vlastita vrijednost λ jest faktor promjene vlastitog vektora x kada se pomnoži s matricom A . Vlastiti prostor matrice jest niz svih parova vlastitih vektora i vlastitih vrijednosti.

Cilj analize dinamičkog odziva konstrukcije jest rješenje generaliziranoga svojstvenog problema napisanog u obliku:

$$A \cdot x = \lambda \cdot B \cdot x \quad (2)$$

Kada se za domene za koje se traži opći oblik vlastitih vrijednosti koristi diskretizacija konačnim elementima, tada su matrice A i B pozitivno definitne te prva predstavlja matricu krutosti, a druga matricu mase. Obje su matrice istog reda s time da u slučajevima kada matrica mase nije dijagonalna obje imaju istu pojasnu širinu. Na temelju iskustva utvrđeno je to da konzistentna formulacija mase nije uvijek potrebna te da se dostatna preciznost također može postići primjenom matrice koncentriranih masa [19].

Nestabilnost zbog izvijanja konstrukcija također je dio problema određivanja vlastitih vrijednosti [20] za koje treba definirati

samo njih prvih nekoliko. U ovome slučaju standardna linearna jednačba poprima sljedeći oblik:

$$K \cdot u = \lambda \cdot K_G \cdot u \quad (3)$$

gdje je K matrica krutosti na savijanje, K_G matrica geometrijske krutosti koja odgovara matrici B u jednačbi (2), λ opterećenje kod izvijanja, a u odgovarajući oblik izvijanja. U ovome slučaju problem vlastite vrijednosti definiran je općom jednačbom (2). Međutim, da bi se dobilo traženo rješenje, jednačba (2) treba se izmijeniti kako slijedi:

$$B \cdot v = x \cdot A \cdot v \quad (4)$$

gdje je ciljno rješenje vlastite vrijednosti apsolutna maksimalna vrijednost $\chi = 1/\lambda$ kojom se dobiva najniža vrijednost opterećenja pri izvijanju λ .

Za analizu stišljivosti tekućine u hidrodinamici također treba primijeniti standardnu formulaciju vlastite vrijednosti. Nakon izmjene Poissonova diferencijalna jednačba drugog reda poprima sljedeći oblik [21-22]:

$$H p = k^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (5)$$

gdje je $p = p(x, y, z, t)$ raspodjela hidrodinamičkog tlaka u prostoru i vremenu. U domeni frekvencije može glasiti $p = p_0 \sin(\omega t)$ gdje druga derivacija iznosi $\ddot{p} = -p_0 \omega^2 \sin(\omega t)$. Takva formula dovodi do standardne definicije vlastite vrijednosti:

$$H p_0 = -k^2 p_0 \quad (6)$$

Iz gornje se analize može zaključiti to da je rješenje vlastite zadaće potrebno u analizi velikog broja inženjerskih problema. U praksi se koristi nekoliko numeričkih metoda. Odabir metode najprikladnije za rješavanje određenog problema ponajprije ovisi o veličini sustava, o pojasnoj širini matrice te o broju potrebnih vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora. U obzir treba uzeti i djelotvornost rješenja koja se baziraju na parametrima kao što su točnost, potreban broj numeričkih operacija, zahtjevi koji se odnose na pohranjivanje podataka te vrijeme računanja središnje obradne jedinice (engl. *Central processor unit* - CPU).

2.1. Sustavi s malim brojem stupnjem slobode

Postojeće djelotvorne i precizne metode za pronalaženje rješenja vlastite zadaće za sustave s malim brojem stupnjeva slobode i s malom pojasnom širinom mogu se podijeliti u tri osnovne skupine:

- metode iteracije vektora (inverzna vektorska iteracija, vektorska iteracija sprijeda, Gram-Schmidtova iteracija, vektorska iteracija s pomakom, Rayleighova iteracija kvocijenta, Jacobijeva iteracija)

- transformacijske metode (Jacobijeva metoda, Householder-QR metoda inverzne iteracije)
- eksplicitne i implicitne metode iteracije polinoma.

Od spomenutih metoda svakako je vrijedno spomenuti dobro poznati postupak inverzne iteracije Householder-QR [2] jer se radi o općeprihvaćenoj metodi za rješavanje vlastitih vrijednosti na temelju standardne formulacije problema, bez potrebe za njegovom transformacijom. Jacobijeva generalizirana iteracija također se smatra zanimljivom i često korištenom tehnikom. Tim se postupkom dobiva izravno rješenje svih vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora za određeni generalizirani problem vlastitih vrijednosti [22-26]. Osim toga, statičko sažimanje bestežinskih stupnjeva slobode u analizi koncentriranih masa nije neophodno za izravno rješavanje, a može biti posebno djelotvorno kada su izvandijagonalni elementi mali ili rijetki [22, 26].

2.2. Sustavi s velikim brojem stupnjeva slobode

Za rješenja velikih sustava s velikim brojem stupnjeva slobode razvijena su dva osnovna numerička postupka: metoda traženja vlastite vrijednosti uz pomoć determinante [24-27] i metoda iteracije po potprostorima [22, 28, 29]. U oba se postupka koriste neke od metoda koje se primjenjuju za sustave s malim brojem stupnjeva slobode, bilo u procesu transformacije bilo u procesu iteracije koji je potreban za rješavanje vlastitog problema.

Algoritam koji se koristi u metodi iteracije potprostora prvotno je razvio Bathe [22]. Taj je algoritam u novije vrijeme poboljšan paralelnim procesuiranjem, što je omogućila primjena nove generacije računala [29].

2.2.1. Metode determinante

Traženje vlastite vrijednosti uz pomoć determinante smatra se naprednom i često korištenom metodom. Njome se djelotvorno objedinjuje trokutasta faktorizacija i Gram-Schmidtova metoda inverzne iteracije vektora. Ta kombinacija nudi djelotvorno rješenje za velike sustave kod kojih je broj potrebnih vlastitih vrijednosti i odgovarajućih vektora bitno manji od reda matrice, isto kao i u slučajevima male pojasne širine matrice. Metoda se temelji na činjenici da vlastite vrijednosti zapravo predstavljaju korijene karakterističnog polinoma. U primijenjenome postupku rješenje se prvo prebacuje u blizinu sljedećega nepoznatog korijena, nakon čega se uz pomoć inverzne iteracije određuje vlastiti par (vlastita vrijednost i pripadajući vektor). Broj negativnih dijagonalnih elemenata matrice tijekom faktorizacije označava to je li pomak u skladu s traženim korijenom. Konvergencija primijenjenih iteracija ponekad može biti spora, osobito kada iteracije ukazuju na konvergenciju prema višestrukome korijenu ili skupu korjenova. U takvim se slučajevima primjenjuje teorem odjeljivanja vlastitih vrijednosti (Sturmovo svojstvo karakterističnih polinoma) kako bi se ubrzao postupak iteracije [30, 31]. Potom se potrebne vlastite vrijednosti i vektori dobivaju u nizu, počevši od najmanje dominantnoga vlastitog para.

U nekim okolnostima metoda traženja vlastitih vrijednosti uz pomoć determinante ima dva ozbiljna nedostatka. Prvi je nemogućnost procjene točnosti aproksimacije vlastitih vektora. Drugi je nedostatak mogućnost gubitka nižih vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora te netočna procjena viših vlastitih vrijednosti koje su uglavnom jako zgusnute. Neodgovarajuća djelotvornost metode dodatno se povećava s potrebom provođenja trokutaste faktorizacije za svaku procjenu determinante, a za to treba predvidjeti dodatno vrijeme računanja.

2.2.2. Metoda iteracije po potprostorima

Metodom iteracije po potprostorima rješava se poopčeni oblik problema vlastitih vrijednosti kako bi se izravno definiralo prvih nekoliko vlastitih vrijednosti, koje su ovdje označene simbolom p , uključujući i pridružene vlastite vektore. Za razliku od metode traženja vlastite vrijednosti uz pomoć determinante, u ovome slučaju nije potrebna transformacija u standardni oblik vlastite vrijednosti. Metodom iteracije po potprostorima dobivaju se točna i brza rješenja za širok raspon vlastitih vrijednosti, a pogodna je i za sustave s velikom pojasnom širinom s više stotina stupnjeva slobode. Kako bi se vrijeme računanja skratilo, primarno se koriste vektorske iteracije te samo nekoliko faktorizacija. Glavna je odlika metode smanjenje dimenzionalnosti analiziranog problema s N -dimenzionalnoga prostora na dimenzionalni potprostor $q = 2p$ za rješavanje problema q -dimenzionalne vlastite vrijednosti, gdje je N broj stupnjeva slobode analizirane domene, dok je p broj najmanje dominantnih traženih vlastitih vrijednosti potrebne točnosti (gdje je $p < q \ll N$).

Općenito, konvergencija se može postići u samo nekoliko iteracija kada početni potprostor definiran vektorima q predstavlja "dobru" aproksimaciju dominantnoga dimenzionalnog potprostora p (tj. kada se vektori početne transformacije nalaze u blizini traženih vlastitih vektora). Također je utvrđeno to da veći broj početnih iteracijskih vektora doprinosi definiranju većega početnog potprostora i većoj konačnoj stopi konvergencije iteracijskih vektora. Zato matrica X u poopčenoj jednadžbi vlastitih vrijednosti sadrži vlastite vektore q kako bi se jamčila monotona konvergencija najmanje dominantnih vlastitih vektora p . Razuman broj iteracijskih vektora koji vode prema monotonoj konvergenciji definiran je kao $q = \min \{2p, p + 8\}$. Postupak se temelji na istodobnoj iteraciji zadanog broja vektora i operatora A i B , pri čemu se u obzir uzima činjenica da oboje teže prema dijagonalnome obliku unutar iteracija po potprostorima. Očito je to da je osnovni problem metode iteracije po potprostorima odabir početnog potprostora.

Optimalnim algoritmom vlastitog rješenja trebala bi se također dokazati numerička stabilnost u generiranju ortogonalne osnove u svakome potprostoru unutar najmanjeg broja potrebnih istodobnih iteracija kojima se još uvijek dobiva zadovoljavajuća stopa konvergencije.

Istodobna iteracija pri formuliranju poopčenih vlastitih vrijednosti pretpostavlja rješavanje sljedeće jednadžbe:

$$A \cdot X_{k+1} = B \cdot X_k \cdot R_{k+1}^{-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

gdje matrica X_{k+1} sadrži iteracijske vektore nakon prvih iteracijskih koraka k , dok je matrica R_{k+1} gornja trokutasta matrica koja omogućuje B -ortogonalnost vektora u X_{k+1} .

Različiti iteracijski postupci koriste se za postizanje rješenja jednadžbe (7). Bauer [32] je predložio originalnu bi-iteracijsku metodu za proizvoljan oblik matrice A . S druge strane Rutishauser [34] stavlja težište na rješavanje posebnog slučaja simetrične matrice A . Metoda istodobne iteracije koju predlaže Jennings temelji se na proračunu matrice linearnog predviđanja za bolju aproksimaciju uz pomoć trenutačnih iteracijskih vektora [34-36]. Iako ti napredni iteracijski postupci uključuju raznovrsne tehnike, svi su oni zapravo prikladna kombinacija osnovnih metoda kao što su Ritzova analiza koja omogućuje najbolju aproksimaciju najnižih vlastitih vrijednosti [37], Rutishauserov algoritam za iteraciju potprostora [33] ili metoda inverzne iteracije s Gram-Schmidtovom ortogonalizacijom.

3. Algoritam za metodu iteracije po potprostorima

Kada je veličina matrice vlastite zadaće vrlo velika, a za točnost dinamičke analize potrebno je samo nekoliko vlastitih vrijednosti i pripadnih vlastitih vektora, tada metoda iteracije po potprostorima ima prednost. Pristup se svodi na dva osnovna koraka:

- redukciju broja stupnjeva slobode korištenjem same metode iteracije po potprostorima koja je prikazana u ovome radu
- izravno rješenje generaliziranog problema vlastite zadaće (2) korištenjem poopčene Jacobijeve metode.

Postoji nekoliko razloga zbog kojih je poopčena Jacobijeva metoda primijenjena u programu ADAD-IZIIS [18] za rješavanje poopčenog oblika jednadžbe za određivanje vlastitih vrijednosti. To je rotacijska metoda za eliminiranje izvandijagonalnih elemenata na temelju graničnih iteracija. U tome procesu samo se izvandijagonalni elementi smanjuju na nulu ako su za magnitudu manji od vršne vrijednosti trenutačne iteracije. Faktori sprežanja $(a_{ij}^2 / a_{ii}a_{jj})^{0.5}$ i $(b_{ij}^2 / b_{ii}b_{jj})^{0.5}$ koriste se za predstavljanje vršne vrijednosti unutar svake iteracije kao mjere sprežanja između poopčenih stupnjeva slobode $i < j$. Smatra se to da su faktori sprežanja manji od 10^{-10} unutar pete iteracije te da vršna vrijednost iznosi 10^{-2k} , gdje je k broj iteracija. Definirano je to da relativna promjena u procjeni vlastite vrijednosti iznosi manje od 10^{-8} .

Osnovni nedostatak metode iteracije po potprostorima jest odabir početnih transformacijskih vektora kao početnog potprostora. Zato je odabir početnih transformacijskih vektora X važan korak u metodi iteracije potprostora te zanimljiva tema za znanstvena istraživanja. Do sada je u literaturi predloženo tek nekoliko postupaka za biranje početnih vektora u p -dimenzionalnome potprostoru pa se taj odabir još uvijek smatra vrlo subjektivnim parametrom.

Opći pristup obuhvaća određivanje stupaca matrice X primjenom elemenata koji isključivo proizlaze iz matrice A i B [22]. Utvrđeno je to da je matrica $R = B \cdot X$, koja predstavlja desnu stranu jednadžbe $A \cdot X = \lambda \cdot B \cdot X$, najdjelotvornija kada je prvi vektor u matrici X jednostavno dijagonala matrice B . Preostali su vektori jedinični vektori s +1 na koordinati s najvećim omjerom a_{ii}/b_{ii} . Gornji tip početnih vektora odabran je kako bi se izbjeglo moguće propuštanje oblika pobuđivanjem svih stupnjeva slobode mase u prvome vektoru matrice B . Istodobno preostali vektori moraju biti linearno neovisni i trebaju pobuđivati samo točke maksimalnog odnosa mase i fleksibilnosti. Osim toga, kako bi se osigurala bolja konvergencija, razmak između ulaznih elemenata predzadnjeg vektora ne bi smio biti premalen. Algoritam koji se temelji na gornjemu pristupu usko je povezan s analizom statičke kondenzacije. Međutim, to nekada može dovesti do velikog broja iteracija. Još jedna mogućnost jest uključivanje konvencionalne Ritzove analize u kojoj zadani obrasci opterećenja mogu predstavljati razumnu prvu aproksimaciju. Ponekad se koristi i algoritam koji predlaže Uhrig [38], a koji se temelji na sintezi komponenata oblika.

3.1. Rješenje "korak po korak"

Primijenjeni algoritam sastoji se od sljedećih sedam koraka koji se nadovezuju na poopćenu vlastitu formulaciju (2):

Korak 1 - Definicija početnog vlastitog potprostora: vlastiti se potprostor prvo određuje s $q = \min\{2p, p+8\}$. Za slučajeve kada je $2p < p + 8$, vlastiti je potprostor određen početnim iteracijskim vektorima q , gdje je $q = 2p$. Ti vektori čine matricu R_1 reda $N \cdot 2p$ sljedećeg oblika:

$$R_1 = B \cdot X_1 \quad (8)$$

gdje je B dijagonalna matrica mase reda $N \cdot N$, a X_1 matrica početne transformacije (vektori početne iteracije) kojom je definiran vlastiti potprostor q . Red matrice X_1 jest $N \cdot 2p$, a on je definiran prema Batheovu postupku [22]. Vrijednost p jest traženi broj vlastitih vrijednosti i vektora.

Korak 2 - Rješenje matrice \bar{X}_{k+1} : kako bi se matrica riješila uz pomoću Gaussove metode eliminacije na temelju jednadžbe, primjenjuje se trokutasta faktorizacija (2). U toj metodi matrica \bar{X}_{k+1} jest početna matrica za iteraciju:

$$\bar{X}_{k+1} = A^{-1} \cdot R_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (9)$$

gdje operator A ostaje nepromijenjen (matrica prvotne krutosti reda $N \cdot N$), \bar{X}_{k+1} je nova iteracijska matrica reda $N \cdot 2p$, a R_k prethodno definirana iteracijska matrica reda $N \cdot 2p$.

Korak 2 - Transformacijski vektori: prema primijenjenome postupku, iteracijski vektori preuzimaju ulogu transformacijskih vektora iznad operatora, matrica A i B . Transformacija je zapravo projekcija tih matrica na prostor rješenja ϵ_{k+1} , i to kako slijedi:

$$A_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \cdot A \cdot \bar{X}_{k+1} \quad B_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \cdot B \cdot \bar{X}_{k+1} \quad (10)$$

Tom se transformacijom stupnjevi slobode smanjuju s N na $2p$ te se iz odabranoga manjeg potprostora q uklanjaju koordinate. Red operatora A_{k+1} i B_{k+1} iznosi $2p \cdot 2p$.

Korak 4 - Rješenje vlastitog sustava: vlastiti sustav projiciranih operatora rješava se uz pomoć poopćenih vlastitih formulacija i poopćene Jacobijevе metode kako slijedi:

$$A_{k+1} \cdot Q_{k+1} = B_{k+1} \cdot Q_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} \quad (11)$$

gdje su operatori A_{k+1} i B_{k+1} definirani u potprostoru q sa smanjenim brojem stupnjeva slobode. Zato se u ovome koraku može primijeniti bilo koja od metoda dostupnih za dobivanje vlastitog rješenja s visokim ili niskim stupnjevima slobode. U ovome se slučaju primjenjuje poopćena Jacobijeva rotacijska metoda za eliminaciju izvandijagonalnih članova.

Tražene aproksimacije vlastitih vektora izračunavaju se u jednome koraku. Matrica Q_{k+1} sadrži vlastite vektore potprostora q , a njezin red glasi $2p \cdot 2p$. Kako se iteracijski vektori približavaju vlastitim vektorima, tako se operatori A i B pomiču prema dijagonalnome obliku.

Korak 5 - Rješenje matrice R_{k+1} : u sljedećem se koraku određuje poboljšana aproksimacija procjena vlastitih vektora te se generiraju nove iteracijske matrice R_{k+1} koje se koriste u iteraciji.

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} \cdot Q_{k+1} \quad (12)$$

gdje red revidiranog rješenja matrice vlastitog vektora, jednadžba 7, glasi $N \cdot 2p$. Poboljšana iteracijska matrica R_{k+1} istog reda dobiva se kako slijedi:

$$R_{k+1} = B \cdot X_{k+1} \quad (13)$$

Korak 6 - Ispitivanje točnosti rješenja: aproksimacije vlastitih vrijednosti i dviju posljednjih slijednih iteracija k i $k+1$ koriste se u svrhu ispitivanja konvergencije iterativnog procesa, i to:

$$t_i^{k+1} = \frac{|\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k|}{\lambda_i^{k+1}} < \text{tolerancija, za } i = 1, 2, \dots, p \quad (14)$$

Uobičajena tolerancija iznosi 10^6 . Iako se iteracije provode za vektore q , $q > p$, konvergencija se mjeri samo za aproksimacije dobivene za prve vlastite vrijednosti p .

Korak 7 - Ponavljanje koraka od 2 do 6: numerički se postupak ponavlja sve dok se ne postigne konvergencija koja je unutar zadane točnosti. Konačno vlastito rješenje može se izraziti kako slijedi:

$$\lambda_{k+1} \rightarrow \text{diag}[\lambda_i^{k+1}] \text{ i } X_{k+1} = [\Phi_i^{k+1}], \text{ za } i = 1, 2, \dots, p \quad (15)$$

U cilju provjere određivanja najnižih vlastitih vrijednosti p i vektora na kraju iterativnog postupka koristi se Sturmova provjera niza, i to na temelju teorema o odjeljivanju vlastitih vrijednosti. Ta se provjera sastoji od izračunavanja histograma vlastitih vrijednosti za simetrične trodijagonalne matrice, pri čemu je broj vlastitih vrijednosti manji od pretpostavljene granične vlastite vrijednosti [30, 31].

3.2. Program ADAD-IZIIS

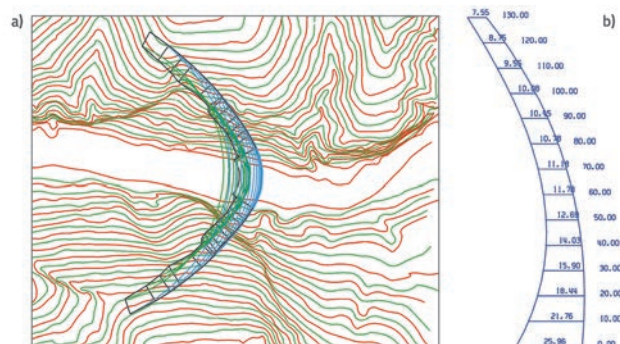
Program ADAD-IZIIS [18] koristi se za provođenje analitičkog postupka u sklopu trodimenzionalne dinamičke analize lučnih brana, što uključuje i analizu međudjelovanja (interakcije) brane i vode (nestišljivost vode), međudjelovanja tla i konstrukcije te nelinearnog djelovanja pri otvaranju kontrakcijskih spojnica. Ključna je odlika programa opcija za računalno projektiranje tijela brane pri čemu se stvarna topologija kanjona u kojemu se brana gradi prati u procesu spajanja i fiksiranja lukova u teren [39-40]. Program automatski generira mrežu konačnih elemenata brane, dio mase temelja kako bi se u obzir uzela interakcija između temelja i brane te mrežu rubnih elemenata na granicama domene tekućine kako bi se u obzir uzela interakcija između tekućine i konstrukcije [40]. Veličina hidrodinamičkih tlakova na kontaktu brane i tekućine ovisi o količini energije koja se prenosi na tekućinu uslijed vibracije brane i okolnog terena [40, 41]. Generiranje kombinirane mreže konačnih elemenata i rubnih elemenata dovoljno je precizno za prikladno predstavljanje topologije terena [40]. Postupak za pronalaženje vlastitog rješenja iteracije potprostora opisan u prethodnome poglavlju u ovoj je studiji razvijen uz pomoć algoritma napisanog u Fortranu. Zatim je taj algoritam unesen u program ADAD-IZIIS. Program sadrži mogućnost višenitne obrade (eng. *multithread processing*) uz pomoć biblioteka MKL Intel i OMP. Ipak, treba istaknuti to da se u ovome radu ne obrađuje paralelno procesiranje za pronalaženje vlastitih rješenja.

4. Vlastite vrijednosti i vlastiti vektori složenog sustava lučne brane

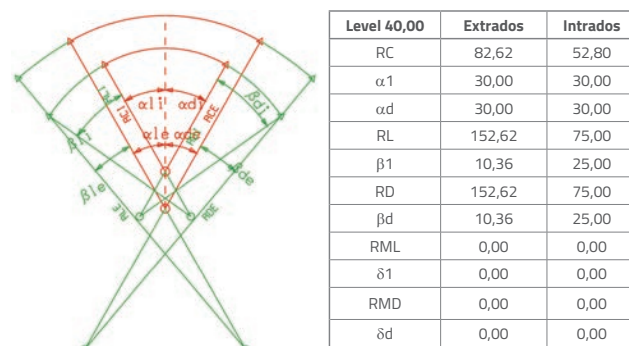
Kako bi se ispitale mogućnosti programa ADAD-IZIIS te algoritma za iteracije potprostora koji je unesen u taj program, program je primijenjen za ocjenu vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora na dvostruko zaobljenoj lučnoj brani. Provjera je obavljena uspoređivanjem rezultata dobivenih simulacijom s rezultatima koji su postignuti uz pomoć komercijalno dostupnog programa SAP 2000 v. 14 [42].

Razmatrana dvostruko zakrivljena lučna brana duga je 405 m. Visina joj iznosi 130 m, a debljina brane u podnožju 26 m. Ta se debljina postupno smanjuje pa na vrhu iznosi 7,6 m. Na slici 1. prikazani su topologija terena na kontaktu s betonskom konstrukcijom lučne brane te središnji poprečni presjek brane. Lukovi su na svim visinama upeti u teren, a sastoje se od kružnih segmenata opisanih središnjim i perifernim radijusima vanjske i

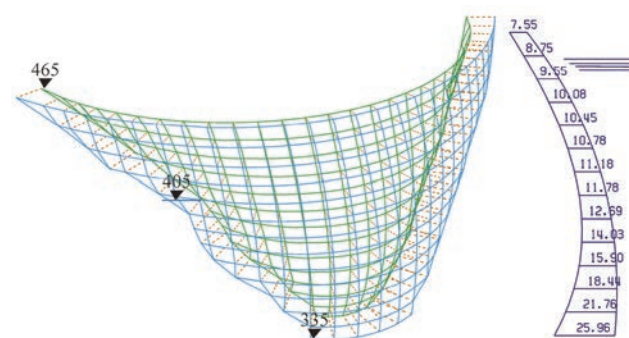
unutarnje zakrivljenosti te odgovarajućim središnjim i perifernim kutovima. Slika 2. prikazuje luk na koti 375 (razina 40) koji sadrži jedan središnji segment i dva periferna. Matematički model brane prikazan na slici 3. generiran je automatski, uz pomoć definiranih oblika lukova na svim kotama odabranima u skladu s topologijom terena.



Slika 1. a) Topologija terena s lučnom branom, b) Prikaz središnjega poprečnog presjeka



Slika 2. Geometrija luka na koti 375 (razina 40) s prikazom središnjeg dijela luka i njegovih perifernih dijelova



Slika 3. Matematički model brane i presjek na sredini

Tijelo brane sastoji se od 27 monolitnih blokova. Model konačnih elemenata lučne brane sastoji se od 199 potkonstrukcija koje su dodatno diskretizirane na 1592 konačna elementa. U automatskome postupku diskretizacije korišteni su kruti elementi s dvadeset i petnaest čvorova. Razvijeni se model sastoji od 3805 vanjskih čvorova smještenih između

potkonstrukcija te ima 11.415 stupnjeva slobode. U programu ADAD-IZIIS pojasne matrice analiziraju se kao posebne vrste rijetkih matrica. Matični pojas može sadržavati i neke nulte elemente. U prikazanim analizama sustav mase i matrica krutosti imaju pojasnu širinu od 1220 za ovaj specifični slučaj od 11.415 stupnjeva slobode. U programu ADAD-IZIIS koristi se poseban algoritam za minimaliziranje pojasne širine kako bi se dobila matrica s manjom pojasnom širinom. Velike i složene građevine kao što su brane obično se povezuju s matricama velike pojasne širine, čak i u slučaju kada je proveden postupak minimalizacije. Ako pojasnu matricu promatramo s aspekta gustoće, analizirani sustav ima gustoću od 21,4 posto, a odgovarajuća rijetkost iznosi 78,6 posto.

Svojstva materijala određena tijekom analiza tipična su za lučne brane: Youngov modul $E = 31,5$ GPa, jedinična gustoća betona $\rho = 2450$ kg/m³, Poissonov koeficijent $\nu = 0,2$, jedinična gustoća vode $\rho = 1000$ kg/m³ te brzina akustičnih valova u vodi $c = 1440$ m/s.

Simulacije su provedene na računalu Dell Latitude E5510 s Intel Core i5, 2,62 GHz, CPU M 560 i s 3,42 GB RAM-a. Za manje od minute određeno je najmanje 12 vlastitih vektora i vlastitih vrijednosti. Monotona konvergencija postignuta je nakon 17 iteracija. S druge strane numerički model analiziran uz pomoć SAP-a 2000 imao je 11.310 stupnjeva slobode. Vrijeme potrebno za prvih 12 vlastitih vektora i vlastitih vrijednosti iznosilo je otprilike minutu, a monotona konvergencija postignuta je nakon 14 iteracija.

Na dinamičko ponašanje spregnutog sustava sastavljenog od lučne brane i akumulacije bitno utječe interakcija između tekućine i brane. Zato treba definirati periode vibracije za čitav sustav. S obzirom na to da program ADAD-IZIIS omogućuje rješavanje rubnih i konačnih elemenata (FEM-BEM) za interakciju između tekućine i građevine te da domena

tekućine nije diskretizirana s konačnim elementima tekućine, pokazalo se to da je metoda dodatne mase jedina mogućnost za određivanje vlastitih vrijednosti spregnutog sustava. Koncept dodatne mase djelotvoran je i dovoljno precizan za izračunavanje vlastitih vrijednosti spregnutih sustava brane i akumulacije.

Vlastite vrijednosti spregnutog sustava izračunane su za dubinu vode u akumulaciji od 110 m (odnos dubine vode i visine brane iznosi 0,85). Osnovni period slobodne vibracije brane (prazna akumulacija) iznosi $T_e = 0,318$ s, a za spregnuti sustav brana – tekućina ta vrijednost iznosi $T_f = 0,345$ s. Zato je masa vode u akumulaciji u interakciji s krutom građevinom tijekom vibracija te se tako povećava dužina perioda vibracije (vlastite vrijednosti) sustava. U oba programa (tj. u ADAD-IZIIS-u i u SAP-u 2000 v.14), hidrodinamički tlak izračunan je u skladu s načelom dodatne mase [43], pri čemu je korišten izraz (16):

$$M_a = \frac{7}{8} \frac{\gamma}{g} \sqrt{H \cdot z} = \frac{7}{8} \rho \sqrt{H \cdot z} \quad (16)$$

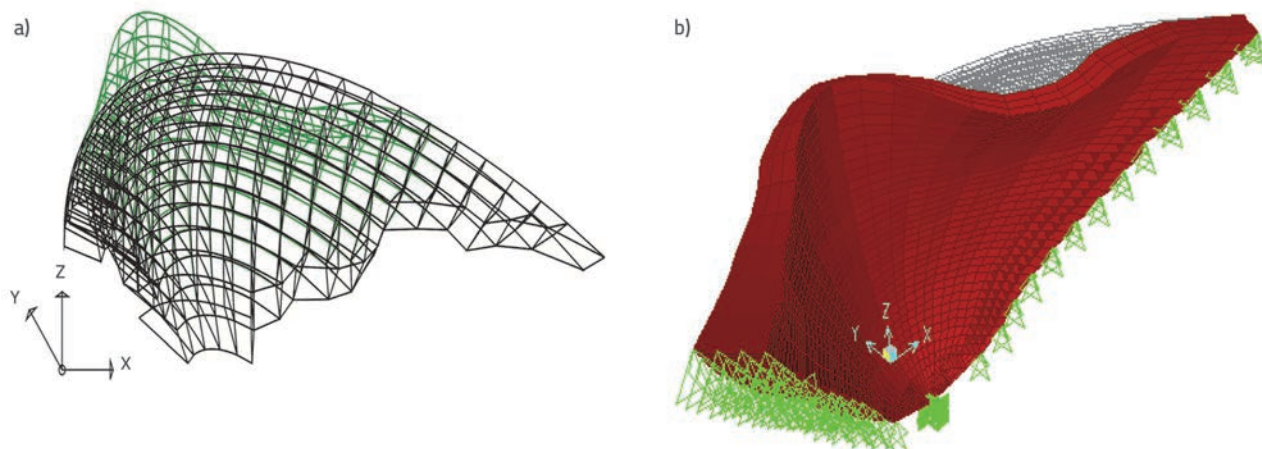
gdje je H razina vode u akumulaciji, dok je z koordinata točke na licu brane izmjerena u koordinatnome sustavu u kojemu je vrijednost H definirana.

U tablici 1. prikazana je usporedba vlastitih vrijednosti, odnosno vibracijskih perioda prazne i pune akumulacije. Odnosi između ocjena vibracijskih perioda dobivenih uz pomoć programa ADAD-IZIIS i SAP 2000 v. 14 dobiveni su uz pomoć sljedećih jednostavnih jednadžbi: $R_{ADAD/SAP} = 100 \cdot (T_{ADAD} - T_{SAP})/T_{SAP}$ i $Ref = 100 \cdot T_e/T_f$.

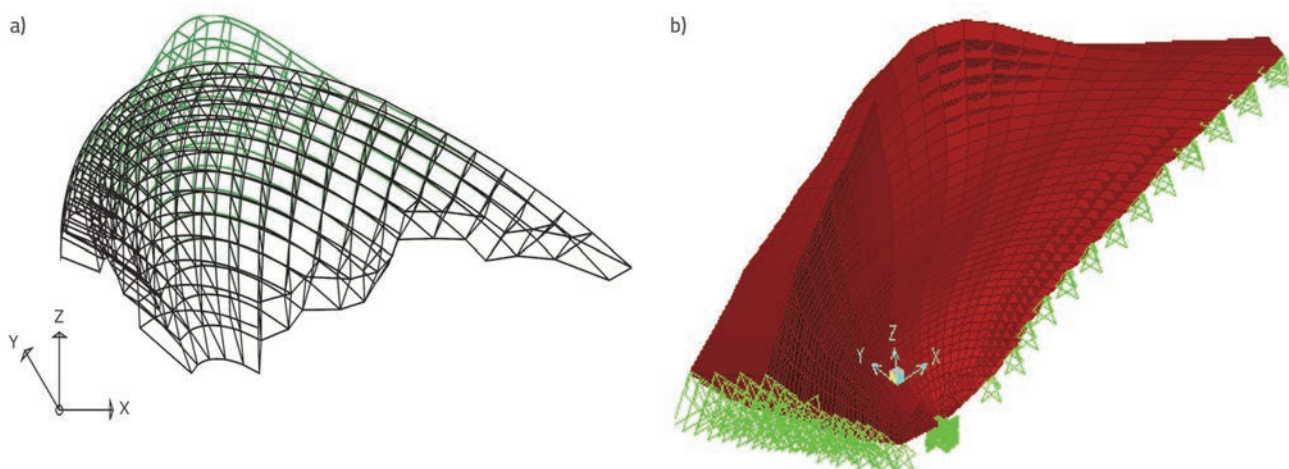
Na temelju tablice 1. može se zaključiti to da odnosi $R_{ADAD/SAP}$ variraju u uskome rasponu od 0 do 10 posto za praznu

Tablica 1. Vlastite vrijednosti izračunane uz pomoć programa SAP 2000 i ADAD-IZIIS

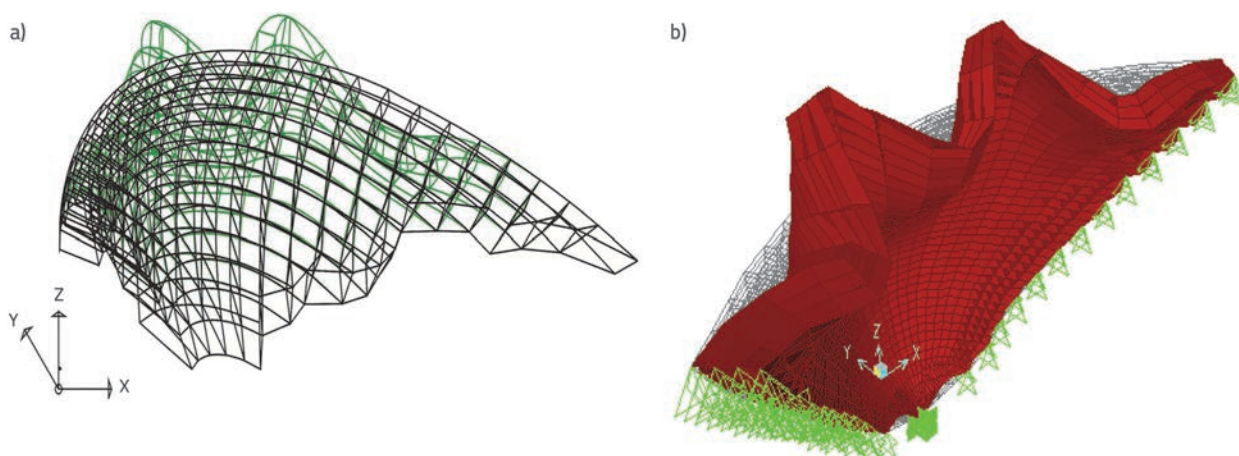
Oblik	Periodi za praznu akumulaciju			Periodi za punu akumulaciju, Hw = 110 m			Periodi za praznu/punu akumulaciju	
	ADAD [sec]	SAP [sec]	Re _{ADAD/SAP} [%]	ADAD [sec]	SAP [sec]	Rf _{ADAD/SAP} [%]	Ref _{ADAD} [%]	Ref _{SAP} [%]
1	0,318	0,317	0,315	0,345	0,358	-3,631	92,174	88,547
2	0,284	0,287	-1,045	0,315	0,322	-2,174	90,159	89,130
3	0,191	0,187	2,139	0,216	0,228	-5,263	88,426	82,018
4	0,167	0,171	-2,339	0,201	0,212	-5,189	83,085	80,660
5	0,149	0,144	3,472	0,165	0,170	-2,941	90,303	84,706
6	0,137	0,139	-1,439	0,154	0,161	-4,348	88,961	86,335
7	0,119	0,121	-1,653	0,137	0,144	-4,861	86,861	84,028
8	0,109	0,110	-0,909	0,133	0,139	-4,317	81,955	79,137
9	0,102	0,102	0,000	0,115	0,122	-5,738	88,696	83,607
10	0,098	0,097	1,031	0,113	0,120	-5,833	86,726	80,833
11	0,091	0,096	-5,208	0,104	0,110	-5,455	87,500	87,273
12	0,086	0,088	-2,273	0,100	0,108	-7,407	86,000	81,481



Slika 4. Prvi modalni oblik: a) Aksonometrijski prikaz uz pomoć programa ADAD-IZIIS, $T_1 = 0,318$ s, b) Perspektivni prikaz uz pomoć programa SAP 2000, $T_1 = 0,317$ s



Slika 5. Drugi modalni oblik: a) Aksonometrijski prikaz uz pomoć programa ADAD-IZIIS, $T_2 = 0,284$ s, b) Perspektivni prikaz uz pomoć programa SAP2000, $T_2 = 0,287$ s



Slika 6. Deseti modalni oblik: a) Aksonometrijski prikaz uz pomoć programa ADAD-IZIIS, $T_{10} = 0,098$ s, b) Perspektivni prikaz uz pomoć programa SAP2000, $T_{10} = 0,097$ s

akumulaciju i akumulaciju ispunjenu vodom. Odnosi $R_{ADAD/SAP}$ veći od nule češći su kod usporedbi s punom akumulacijom, čemu je najvjerojatniji razlog činjenica da su vlastite vrijednosti izračunane bez korištenja programa ADAD-IZIIS, primjenom koncepta dodatne mase. Takvi su rezultati i više nego ohrabrujući jer pokazuju visok stupanj suglasnosti, a odnosi veći od nule samo su ostatak koji proizlazi iz zaokruživanja brojeva na najbližu stotinku sekunde, odnosno te vrijednosti ne proizlaze iz numeričke pogreške. S druge strane odnosi Ref su, kao što se to moglo i očekivati, u rasponu od 80 do 90 posto za obje šifre. Mogući raskoraci u skladu su s onima koji se javljaju kod omjera $R_{ADAD/SAP}$.

Generirani modeli konačnih elemenata, dobiveni obrasci vibracija i modalni oblici za prvi, drugi i treći oblik prikazani su na slikama od 4. do 6. Prikazani modeli konačnih elemenata brane nešto su drugačiji. Do raskoraka dolazi na kraju lukova jer program za vizualizaciju koji je dio ADAD-IZIIS-ova koda crta lukove po čitavoj dužini i pritom ne zanemaruje fiksirani dio. Međutim, to ne utječe znatno na točnost vlastitog rješenja jer su obrasci slobodnih vibracija povezani samo sa stupnjevima slobode, bez ikakvih zadanih ograničenja.

Slike od 4. do 6. prikazuju i neke karakteristične oblike iz kojih se mogu naslutiti obrasci vibracija dobiveni uz pomoć obaju programa. Iz tih se slika može zaključiti to da postoji dobra podudarnost između prikazanih modalnih oblika.

5. Zaključak

U radu je prikazan računalni algoritam temeljen na metodi iteracije potprostora koji je unesen u program ADAD-IZIIS radi provedbe analize metodom konačnih elemenata za lučne brane. Metoda je posebno korisna za definiranje šireg raspona vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora složenih sustava s velikim matricama mase i krutosti te sa stotinama stupnjeva slobode. Algoritam se temelji na rješavanju poopćenog oblika problema vlastitih vrijednosti, i to izravno, bez transformacije u standardni oblik vlastitih vrijednosti. Osnovne značajke te metode jesu smanjenje prostorne dimenzionalnosti i istodobna iteracija željenog broja vektora i odgovarajućih operatora, pri čemu se tijekom iteracije provodi i dijagonalizacija matrice.

Osnovne prednosti primijenjenog postupka za iteraciju potprostora jesu ušteda vremena i točna aproksimacija modalnih oblika, pri čemu praktički nema mogućosti propuštanja dominantnoga modalnog oblika. Kako bi se ocijenile vlastite vrijednosti i vlastiti vektori, prilagođeni kod programa ADAD-IZIIS ispitan je na složenoj lučnoj brani s dvostruko zakrivljenim lukom. Postupak kontrole proveden je uspoređivanjem rezultata simulacije s rezultatima koji su dobiveni uz pomoć komercijalno dostupnog programa SAP 2000, v. 14. Jedinu zanemarivu raskoraci zabilježeni su u duljinama vibracijskih perioda na prvih 12 analiziranih modalnih oblika.

LITERATURA

- [1] Noble, B.: Applied Linear Algebra, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [2] Wilkinson, J.H.: The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [3] Clough, R.W., Penzien, J.: Dynamic of Structures, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975
- [4] Amabili, M., Garziera, R., Carra, S.: The effect of rotary inertia of added masses on vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells, Journal of Fluids and Structures, 21 (2005), pp. 449-458, <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.07.018>
- [5] Bayraktar, A., Altunisik, A.C., Sevim, B., Türker, T., Akköse, M., Coskun, N.: Modal analysis, experimental validation and calibration of a historical masonry minaret, Journal of Testing and Evaluation, 36 (2008) 6, pp. 516-524.
- [6] Lotfi, V.: Seismic analysis of concrete gravity dams by a decoupled modal approach in time domain, Electronic Journal of Structural Engineering, 3 (2003), pp. 102-116.
- [7] Samii, A., Lotfi, V.: Comparison of coupled and decoupled modal approaches in seismic analysis of concrete gravity dams in time domain, Finite Elements in Analysis and Design, 43 (2007), pp. 1003 - 1012, <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.06.015>
- [8] Tsai, C.S., Lee, G.C., Ketter, R.L.: Solution of dam-reservoir interaction problem using combination of FEM, BEM with particular integrals, modal analysis and substructuring. Engineering Analysis with Boundary Elements, 9 (1992), pp. 219-232, [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(92\)90096-P](https://doi.org/10.1016/0955-7997(92)90096-P)
- [9] Wang, J.T.: Investigation of damping in arch dam-water-foundation rock system of Mauvoisin arch dam, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 31 (2011), pp. 33-44, <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2010.08.002>
- [10] Tsai, C.S., Lee, G.C.: Method for transient analysis of three dimensional dam reservoir interactions, Journal of Engineering Mechanics ASCE, 116 (1990), pp 2151-2172, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1990\)116:10\(2151\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:10(2151))
- [11] Bayraktar, A., Sevim, B., Altunisik, A.C.: Finite element model updating effects on nonlinear seismic response of arch-dam-reservoir-foundation systems, Finite Elements in Analysis and Design, 47 (2011) 2, pp. 85-97, <https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.09.005>
- [12] Tsai, C.S.: Analyses of three-dimensional dam-reservoir interaction based on BEM with particular integrals and semi-analytical solution, Computers and Structures, 43 (1992) 5, pp. 863-872, [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90300-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90300-0)
- [13] Tsai, C.S., Lee, G.C., Yeh, C.S.: Time-domain analyses of three-dimensional dam-reservoir interactions by BEM and semi-analytical method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 10 (1992) 2, pp. 107-118, [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(92\)90039-A](https://doi.org/10.1016/0955-7997(92)90039-A)
- [14] Oskoue, A. V., Dumanoglu, A.A.: Nonlinear dynamic response of concrete gravity dams: cavitation effect, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 21 (2001), pp. 99-112, [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(00\)00103-2](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(00)00103-2)

- [15] Akkose, M., Simsek, E.: Non-linear seismic response of concrete gravity dams to near-fault ground motions including dam-water-sediment-foundation interaction, *Applied Mathematical Modelling*, 34 (2010), pp. 3685-3700, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.019>
- [16] Akkose, M., Bayraktar, A., Dumanoglu, A.A.: Reservoir water level effects on nonlinear dynamic response of arch dams, *Journal of Fluids and Structures*, 24 (2008), pp. 418-435, <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2007.08.007>
- [17] Chowdhury, I., Shambhu, P.D: Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems, Petrofac International Limited Sharjah, U.A.E. and Department of Civil Engineering Indian Institute of Technology Kharagpur 721302, India
- [18] Mircevska, V., Bickovski, V.: ADAD-IZIIS software: Analysis and Design of Arch Dams, IZIS- univ. "Ss. Cyril and Methodius", User's Manual, 2008
- [19] Chopra, A.K., Dibaj, M., Clough, R.W., Penzien, J., Seed, H.B.: *Earthquake Analysis of Earth dams*, Univ. California, Berkeley, 1964-1968.
- [20] Rubinstein, M.F.: *Structural Systems- Static, Dynamic and Stability*, Prentice Hall, 1970.
- [21] Brebbia, C.A., Georgioa, P.: Combination of boundary and finite elements in elastostatics, *Applied Mathematical Modeling*, 3 (1979), pp. 212-220, [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(79\)90053-2](https://doi.org/10.1016/0307-904X(79)90053-2)
- [22] Bathe, K.J.: *Solution Methods for Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering*, Report UC SESM 71-20, Civil Engineering Department, UC Berkeley, 1971.
- [23] Bathe, K.J., Wilson, E.L.: *Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics*. *Intl. Journal for numerical methods in engineering*, 6 (1973), pp. 213-226, <https://doi.org/10.1002/nme.1620060207>
- [24] Saad, Y.: *Numerical methods for large eigenvalue problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd edition, pp. 276, 2011, <https://doi.org/10.1137/1.9781611970739>
- [25] Parlett, B.N.: *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980, Reprinted as *Classics in Applied Mathematics 20*, SIAM, Philadelphia, 1997
- [26] Falk, S., Langemeyer P.: *Das Jacobische Rotationsverfahren für reell-symmetrische Matrizenpaare*, Elektron. Dutenuerarb, pp. 30-34, 1960.
- [27] Bathe, K.J., Wilson, E.L., Peterson, F.E.: *SAP IV- A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear System*, Report EERC 73-11, Civil Engineering Department, UC Berkeley, 1971.
- [28] Bathe, K.J., Wilson, E.L.: Large eigenvalue problems in dynamic analysis, *ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, 98 (1972) 6, pp. 1471-1485.
- [29] Bathe, K.J.: The subspace iteration method, *Journal Computers and Structures*, 126 (2013), pp. 177-183, <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.06.002>
- [30] Dumitriu, A., Edelman, A.: Global spectrum fluctuations for the β -hermite and β -laguerre ensembles via matrix models, *Journal of Mathematical Physics*, 47 (2006) 6.
- [31] Edelman, A., Rao, N.R.: Random matrix theory, *Acta Numerica*, 14 (2005), pp. 233-297, <https://doi.org/10.1017/S0962492904000236>
- [32] Bauer, F.L., Treppen, D.V.: Iteration und verwandte Verfahren zur Lösung Algebraischer Eigenwertprobleme, *Zamp*, 8 (1957).
- [33] Rutishauser, H.: Computational aspects of F.L. Bauer's Simultaneous Iteration Method, *Numer. Math.*, 13 (1969).
- [34] Jenings, A.: A Direct Iteration Method of Obtaining Latent Roots and Vectors of Symmetric Matrix, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 63 (1963).
- [35] Bronlund, O.E.: Eigenvalues for large matrices, *Symp. On Finite Element Techniques at the institute für Static und Dynamik der Luft und Raumfahrtskonstruktionen*, Univ. Of Stuttgart, 1969.
- [36] Jenings, A., Orr, R.L.: Application of the Simultaneous Iteration Method to Undamped Vibration Problems, *Int. Journ. For Num. Methods in Eng.*, 3 (1971) 1, pp. 13-24, <https://doi.org/10.1002/nme.1620030105>
- [37] Collatz, L.: *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer, New York, 1959.
- [38] Uhrig, R.: Reduction of Number of Unknowns in the Displacement Method Applied to Kinetic Problems, *Journnal Sound and Vibration*, 4 (1996) 2.
- [39] Mircevska, V., Bickovski, V., Aleksov, I., Hristovski V.: Influence of irregular canyon shape on location of truncation surface, *Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37 (2013), pp 624-636, <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.12.004>
- [40] Mircevska, V., Nastev, M., Hristovski, V., Bulajic I.: Arch Dam-Fluid Interaction Considering Reservoir Topology, *Journal of Earthquake Engineering*, 18 (2014), pp 1083-1101.
- [41] Pejović, R., Mrdak, R., Živaljević, R., Mijušković, O.: An analysis of seismic resistance of the Grancarevo concrete dam, *GRAĐEVINAR*, 58 (2006) 6, pp. 447-453.
- [42] Software SAP 2000 v.14: Integrated solution for structural analysis & design, CSI
- [43] Westergaard, H.M.: Water pressure on dams during earthquakes, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 98 (1933), pp. 418-472.