

Primljen / Received: 9.5.2016.

Ispravljen / Corrected: 8.3.2017.

Prihvaćen / Accepted: 10.4.2017.

Dostupno online / Available online: 10.12.2017.

Uslojeni konačni elementi u proračunu spregnutih konstrukcija izloženih dugotrajnim djelovanjima

Autori:



Dr.sc. **Anđelko Cumbo**, dipl.ing.građ.
Institut za urbanizam, građevinarstvo i ekologiju Republike Srpske, Banja Luka
andjelko.cumbo@gmail.com



Prof.emeritus dr.sc. **Radomir Folić**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Novom Sadu
Fakultet tehničkih znanosti
folic@uns.ac.rs

Pregledni rad

Anđelko Cumbo, Radomir Folić

Uslojeni konačni elementi u proračunu spregnutih konstrukcija izloženih dugotrajnim djelovanjima

U radu je predložen jedan numerički proračunski model za analizu stanja naprezanja i deformacija zbog puzanja i skupljanja betona i relaksacije čelika za prednapinjanje kod statički neodređenih spregnutih konstrukcija utemeljen na uslojenim konačnim elementima. Algoritam proračuna omogućava da se kroz karakteristične vremenske intervale uvedu sve bitne promjene u konstrukciji u skladu s tehnološkim postupcima pri izvođenju radova. Razvijen je i odgovarajući računalni program prilagođen inženjerskim proračunima u praksi.

Ključne riječi:

konačni elementi, spregnute konstrukcije, puzanje i skupljanje, relaksacija, reologija

Subject review

Anđelko Cumbo, Radomir Folić

Layered finite elements in the analysis of composite structures exposed to long-term effects

This paper presents the use of a numerical model based on layered finite elements in the analysis of stress and strain due to creep and shrinkage of concrete and relaxation of prestressing steel in statically indeterminate composite structures. The calculation algorithm allows significant changes in the structure through characteristic time intervals, in accordance with technological procedures used during realisation of works. The corresponding computer program adapted to daily practical engineering design is also developed.

Key words:

finite elements, composite structures, creep and shrinkage, relaxation, rheology

Übersichtsarbeit

Anđelko Cumbo, Radomir Folić

Geschichtete finite Elemente zur Berechnung von Verbundkonstruktionen bei langanhaltenden Einwirkungen

In dieser Arbeit wird ein auf geschichteten finiten Elementen beruhendes numerisches Berechnungsmodell für die Analyse des durch Schwinden und Kriechen des Betons sowie durch die Relaxation der Bewehrung verursachten Spannungs- und Dehnungszustands bei statisch unbestimmten Verbundkonstruktionen eingeführt. Der Berechnungsalgorithmus ermöglicht, dass durch kurze Zeitintervalle alle entscheidenden Veränderungen in der Konstruktion im Einklang mit technologischen Verfahren bei der Ausführung erfasst werden. Es wurde auch ein entsprechendes für Ingenieurberechnungen in der Praxis angepasstes Computerprogramm entwickelt.

Schlüsselwörter:

finite Elemente, Verbundkonstruktionen, Kriechen und Schwinden, Relaxation, Rheologie

1. Uvod

Spregnuti nosač tvore dva elementa ili više njih od materijala različitih svojstava konstrukcijski ujedinjenih po visini poprečnoga presjeka. U nizu mogućih sprezanja, u građevinskoj se praksi najčešće susreću spregnuti nosači sastavljeni od čelika i betona. Pritom je uobičajena težnja da se maksimalno iskoriste najpovoljnija svojstva čeličnoga i betonskog dijela spregnutog elementa. Poznato je da se preuzimanjem vlačnih naprezanja čelikom, a tlačnih naprezanja betonom mogu postići spregnuti nosači bliski optimalnima. Time se omogućava oblikovanje elegantnih i vitkih konstrukcija, uz visoki stupanj industrijalizacije i kontrole kvalitete ugrađenoga materijala i izvedbe [1].

Prema vrsti i opsegu sprezanja betona i čelika mogu se formirati razni oblici spregnutih nosača. U ovisnosti o tehnološkom postupku pri izvedbi, sprezanje se prema opsegu može ostvariti za cjelokupno ili djelomično stalno i korisno opterećenje, s prednaprezanjem betona i/ili čeličnog nosača ili bez njega. To se obično postiže primjenom potpunoga ili djelomičnog podupiranja pri faznom građenju spregnute konstrukcije. Prema vrsti sprezanja može se realizirati kruto, elastično i diskontinuirano sprezanje, što ponajprije ovisi o uvjetima uporabljivosti i uvjetima izvedbe. Elastično i diskontinuirano sprezanje specifični su oblici sprezanja kojima se mogu postići povoljne raspodjele naprezanja i deformacija u presjecima spregnutih nosača. Međutim, analiza u ovom radu odnosi se na kruto spregnute elemente čelik-beton, kod kojih se podrazumijeva da neće doći do popuštanja spoja i da neće biti relativnih horizontalnih pomaka na kontaktnoj plohi između čelika i betona, tako da do loma dolazi dostizanjem granične nosivosti na savijanje, a ne smicanjem kontaktne plohe spregnutih elemenata. Također se pretpostavlja da betonski dio preuzima tlačna naprezanja i da pojava vlačnih naprezanja i pukotina zapravo isključuje beton iz nošenja. Za takav oblik sprezanja može se s dovoljnom točnošću uzeti da je u području uporabnih naprezanja ($\sigma_c \leq 0,4f_{ck}$) veza naprezanje-deformacija linearna i da vrijedi pretpostavka o jednakosti deformacija u kontaktnim točkama dva materijala.

Poznato je da skupljanje i puzanje betona tijekom vremena mogu imati značajan utjecaj na promjenu naprezanja i deformacija spregnutih konstrukcija [2]. Deformacije zbog puzanja betona u području uporabnih naprezanja mogu se dovesti u približno linearnu vezu s naprezanjima - linearna teorija puzanja, a pri proračunu se uzima u obzir da skupljanje ne ovisi o vanjskom opterećenju. Te deformacije mogu biti dva do tri, pa i više puta veće od elastičnih deformacija, zbog čega je veoma važno da se te promjene obuhvate proračunom i da se osim nosivosti osigura uporabljivost i trajnost spregnute konstrukcije, uzimajući u obzir i moguće različite vremenske intervale aktiviranja naprezanja u pojedinim dijelovima/slojevima.

Veze između naprezanja i deformacija u okviru linearne teorije puzanja dane su u integralnom/diferencijalnom obliku, a rješavanje tih jednadžbi u zatvorenom obliku nije moguće čak ni za posve jednostavna prijašnja naprezanja/deformacije. Zbog toga se za rješavanje problema u praksi uglavnom primjenjuju

numeričke metode te se problem svodi na rješavanje sustava algebarskih jednadžbi. Analiza naprezanja i deformacija kod statički neodređenih spregnutih konstrukcija dodatno je zamršena, jer reološke karakteristike materijala tijekom vremena izazivaju promjenu reakcija, a time i unutarnjih sila i bez promjene opterećenja. Osnove za proračun statički neodređenih konstrukcija po metodi sila uvedene su u [2] gdje su u vezu naprezanje-deformacija uvedena viskoelastična svojstva materijala te je upotrijebljena algebarska veza naprezanje-deformacija za beton. Kasnije se sve više razvijaju proračunski modeli po metodi pomaka i metode kojima se izvodi diskretizacija konstrukcije na elemente konačnih dimenzija. Najpoznatija je i najviše primjenjivana metoda konačnih elemenata (MKE) [3], kod koje se umjesto diferencijalnih postavljaju obične algebarske jednadžbe s matičnim oblikom koji je vrlo pogodan za programiranje i uporabu računala.

Vrlo sadržajan i opsežan pregled metoda dugotrajnih vremenskih analiza, uključujući i procedure dane u europskim normama EN 1992, EN 1994-1-1, i EN 1994-2, [4, 5]. Pregled stanja u širem području projektiranja i analize spregnutih konstrukcija čelik-beton, s osvrtnom na određivanje sudjelujuće širine ploče, predmet je rada [6].

U ovom radu razvijen je model proračuna primjenom metode konačnih elemenata. Pri tome je za izvođenje matrice krutosti konačnog elementa primijenjena metoda slojeva u presjeku, a utjecaji viskoznih svojstava materijala uvedeni su s pomoću fiktivnoga opterećenja [7]. Primjena inkrementalnih oblika veze naprezanje-deformacija za pojedine materijale omogućuje poopćavanje postupka za diskontinuirane i kontinuirane promjene uvođenjem fiktivnih i konačnih intervala vremena [8]. Time se ukupan postupak proračuna svodi na rješavanje algebarskih jednadžbi u matičnom obliku, što daje pogodnost za programiranje i automatizaciju proračuna.

2. Inkrementalne veze između napona i deformacija

2.1. Inkrementalna veza za beton

Poznato je da je beton viskoelastoplastičan materijal i da se pod opterećenjem deformira. Za nalaženje matematičkih veza naprezanje-deformacija u teorijskoj se reologiji primjenjuju idealizirana tijela ili reološko-mehanički modeli. Za kratkotrajna opterećenja u elastičnom području primjenjuje se poznata Hookeova veza. Međutim, pri dugotrajnom djelovanju opterećenja deformacije rastu i bez porasta naprezanja. Te deformacije su to veće što opterećenje dulje traje i kada se optereti mladi beton. U literaturi se one nazivaju deformacije puzanja betona. Ta je pojava dosta složena, pa je i njezina matematička interpretacija složena [9]. Za praktične se probleme veza između naprezanja i deformacija temelji na linearnoj teoriji tečenja. Ta teorija polazi od određenih pretpostavki, a to su:

- beton se smatra homogenim i izotropnim materijalom

- trenutna elastična deformacija betona proporcionalna je naprezanjima i ovisi o starosti betona (promjenljivi modul elastičnosti)
- deformacija skupljanja betona ne ovisi o naprezanju i posljedica je procesa očvršćivanja betona
- deformacija puzanja betona ovisi linearno o dugotrajnom djelovanju naprezanja
- na deformacije puzanja može se primijeniti Boltzmanov princip superpozicije.

U općem slučaju, ukupna deformacija betona $\varepsilon_c(t)$ u vremenu t linearno je ovisna o naprezanju σ_c i iznosi, prema [10]:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c \cdot \varphi(t, \tau) \quad (1)$$

gdje je $\varphi(t, \tau)$ funkcija puzanja betona koja prikazuje ukupnu deformaciju u trenutku vremena t pri konstantnom jediničnom naprezanju $\sigma_c = 1$ koje djeluje od trenutka $t = \tau$.

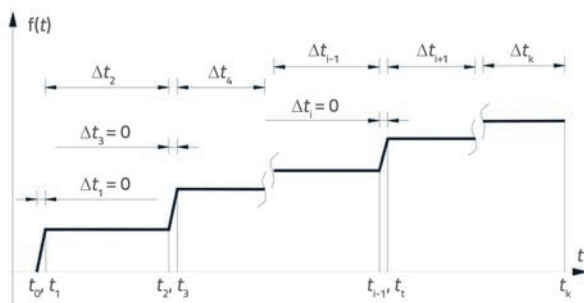
Ako je betonski presjek izložen djelovanju promjenljivoga naprezanja kao kontinuirane funkcije u vremenskom intervalu od t_0 do t , onda se, na osnovi pretpostavke o superpoziciji deformacija za ukupne deformacije može pisati [8]

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{cn}(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) \cdot d\sigma(\tau) \quad (2)$$

gdje je $\varepsilon_{cn}(t)$ deformacija betona u trenutku t neovisna o naprezanju, poput skupljanja ili toplinskog istezanja.

Oblik funkcije puzanja diktira točnost rezultata proračuna. Poznate su različite teorije puzanja betona i analitički modeli za funkciju puzanja koji se ovdje neće posebno razmatrati.

Za rješenje integralne jednadžbe (2) treba primijeniti numeričku integraciju. Za to ukupan interval vremena $(t-t_0)$ treba podijeliti na podintervale $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, ($i = 1, 2, \dots, k$), u kojima se uzastopno provodi proračun (slika 1.). Pri tome se skokovite promjene naprezanja obuhvaćaju fiktivnim (nultim) intervalima $\Delta t_i = 0$ čime se postiže poopćenje postupka proračuna.



Slika 1. Diskretizacija vremena

Formiranjem podintegrala u inkrementalnom obliku i primjenom nekih od poznatih postupaka numeričke integracije, veza naprezanje-deformacija za beton može se izraziti u obliku danim u izrazu (3), prema [8]:

$$\Delta \varepsilon_c(t_k) = \frac{\Delta \sigma_c(t_k)}{E_{c(k,k-1)}} + \Delta \varepsilon_c^*(t_k) \quad (3)$$

gdje je $\Delta \varepsilon_c^*(t_k)$ slobodna deformacija betona koja je dana izrazom (4):

$$\Delta \varepsilon_c^*(t_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta \sigma_c(t_i)}{E_{c(k,i-1)}^*} + \Delta \varepsilon_{cn}(t_k) \quad (4)$$

$E_{c(k,k-1)}$ je poopćeni, a $E_{c(k,k-1)}^*$ izvedeni modul deformacije betona koji ovisi o primijenjenom tipu numeričke integracije za prihvaćenu funkciju puzanja betona. Ti su moduli povezani izrazom (5):

$$\frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} = \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} - \frac{1}{E_{c(k-1,i-1)}} \quad (5)$$

gdje su:

$\Delta \varepsilon_c(t_k)$ - prirast deformacije betona u tekućem k -tom intervalu vremena

$\Delta \varepsilon_{cn}(t_k)$ - prirast deformacije skupljanja betona u tekućem k -tom intervalu vremena

$\Delta \sigma_c(t)$ - prirast naprezanja u betonu u i -tom intervalu vremena ($i=1, 2, \dots, k-1$).

Jednadžba (3) jedinstveni je poopćeni oblik, jer se mogu primijeniti svi poznati oblici veze naprezanje-deformacija za beton, uključujući i metodu AAEM (eng. *Age-adjusted effective modulus method*) Bažant, 1972.). Time je, neovisno o broju podintervala, objedinjen tok proračuna u fiktivnim i konačnim intervalima za bilo kakvu prošlost vanjskih utjecaja. Točniji proračuni zahtijevaju veći broj podintervala i primjenu računala. Međutim, za jednostavnije se prošlosti opterećenja, uz uzastopnu primjenu metode AAEM mogu postići rezultati zadovoljavajuće točnosti i s minimalnim brojem podintervala.

Primjenom izraza (3) tekući konačni intervali vremena obuhvaćaju se punim rekurzivnim izrazom, a u fiktivnom intervalu odgovarajući se modul svodi na modul elastičnosti, dok su slobodne deformacije betona tada jednake nuli. Taj je oblik zapravo poznati oblik veze naprezanje-deformacija za elastično stanje (Hookeova veza). Izrazom (4) dana je promjena slobodne deformacije betona, u tekućem k -tom intervalu, od prethodne prošlosti naprezanja do promatranoga intervala (bez utjecaja k -tog dijela prošlosti naprezanja i s prirastom deformacije skupljanja betona samo u tekućem k -tom intervalu.

2.2. Inkrementalna veza za prednapeti čelik

Čista (svojstvena) relaksacija prednapetoga čelika može se definirati kao pad početnih vlačnih naprezanja u određenom vremenu pri konstantnoj deformaciji. Međutim, u uporabnim su uvjetima deformacije spregnutoga nosača tijekom vremena promjenljive, pa su stoga promjenljive i deformacije prednapetog

čelika. Primjenom inkrementalne veze naprezanje-deformacija te se promjene mogu obuhvatiti s dovoljnom točnošću za uobičajene probleme u praksi [11]. Poopćeni oblik inkrementalne veze za prednapeti čelik može se pisati u obliku:

$$\Delta\sigma_p(t_k, t_{k-1}) = E_p \cdot \Delta\varepsilon_p(t_k, t_{k-1}) + \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_k, t_{k-1}) \quad (6)$$

gdje je $\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_k, t_{k-1})$ promjena naprezanja zbog relaksacije pri promjenljivoj deformaciji, odnosno reducirana relaksacija prednapetoga čelika.

Prirast reducirane relaksacije može se prikazati u obliku umnoška dviju nezavisnih funkcija. Prva funkcija uvodi utjecaj korigiranoga naprezanja za diskretne trenutke promatranog intervala, a druga promjenu reducirane relaksacije u proteklom vremenu. Pojednostavnjeni inkrementalni oblik reducirane relaksacije može imati oblik prikazan u izrazu (7):

$$\bar{\sigma}_{pr}(t_k, t_{k-1}) = f_1\bar{\sigma}_p(t_k) \cdot f_2(t_k - t_0) - f_1\bar{\sigma}_p(t_{k-1}) \cdot f_2(t_{k-1} - t_0) \quad (7)$$

pri čemu su korigirana naprezanja za diskretne trenutke promatranoga intervala dana izrazima (8) i (9):

$$\bar{\sigma}_p(t_{k-1}) = \sigma_p(t_{k-1}) - \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_{k-1}, t_0) = E_p \cdot \varepsilon_p(t_{k-1} - t_0) \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_p(t_k) = \sigma_p(t_k) - \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_k, t_0) = E_p \cdot \varepsilon_p(t_k - t_0) \quad (9)$$

Pri određivanju inkrementalne relaksacije sve su veličine poznate iz prethodnih koraka proračuna, nepoznato je samo korigirano naprezanje u tekućem koraku proračuna. To traži primjenu iteracijskoga postupka, ali se za potrebe u praksi mogu uvesti odgovarajuća pojednostavnjenja. Ako se pretpostavi da je korigirano naprezanje u tekućem vremenskom intervalu konstantno, tada su sve veličine poznate i nisu potrebne spomenute iteracije. Mogu se uvesti i dodatna pojednostavnjenja u kojima se umjesto reducirane primjenjuje svojstvena relaksacija i uz to se umjesto korigiranoga naprezanja za prethodni diskretni trenutak upotrebljava stvarno naprezanje, tj. kada se zanemari utjecaj relaksacije na vrijednost početnoga korigiranog naprezanja. Osim toga se relaksacija prednapetoga čelika u proračun može uvesti i pojednostavnjenom vezom s reduciranim modulom elastičnosti [12]. Taj je približni postupak proračuna na strani sigurnosti, a u njemu se primjenjuje izraz (10):

$$\Delta\sigma_p(t_k, t_{k-1}) = (1 - \rho_p) \cdot E_p \cdot \Delta\varepsilon_p(t_k, t_{k-1}) = E_p^* \cdot \Delta\varepsilon_p(t_k, t_{k-1}) \quad (10)$$

U tom se izrazu pojavljuje reducirani modul elastičnosti E_p^* u obliku

$$E_p^* = (1 - \rho_p) \cdot E_p \quad (11)$$

gdje je ρ_p koeficijent relaksacije koji se najčešće daje u tehničkim propisima. To je obično vrijednost čiste relaksacije za odgovarajući prednapeti čelik.

Pri diskontinuiranim se promjenama uvode fiktivni (nulti) intervali vremena, a inkrementalna je relaksacija tada jednaka nuli. To ne traži nikakve promjene općega izraza, što je pogodno kada se upotrebljavaju matricni oblici jednadžbi i izrada programskih paketa.

2.3. Inkrementalna veza za konstrukcijski čelik i meki betonski čelik

Za čelični dio spregnutoga presjeka – konstrukcijski čelik i meki čelik (meka armatura) pretpostavlja se linearna veza naprezanje-deformacija prema Hookeovom zakonu za sve podintervale vremena:

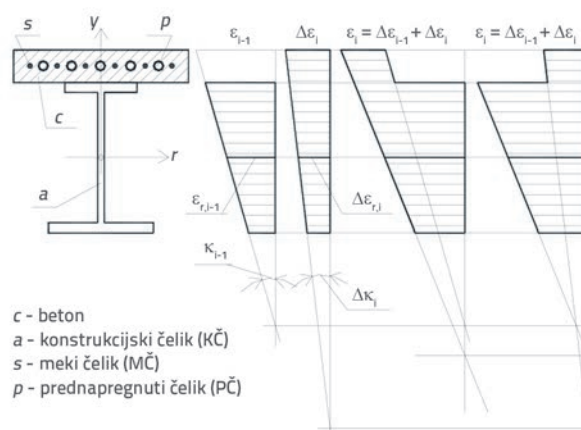
$$\Delta\sigma_a(t_k) = E_a \cdot \Delta\varepsilon_a(t_k) \quad (12)$$

$$\Delta\sigma_s(t_k) = E_s \cdot \Delta\varepsilon_s(t_k) \quad (13)$$

U daljem se razmatranju upotrebljavaju matricni oblici izraza (1) do (6) s komponentnim deformacijama $\Delta\varepsilon_r$ i $\Delta\kappa$ i odgovarajućim komponentama naprezanja $\Delta\alpha_r$ i $\Delta\beta$ [13].

3. Jednadžbe ravnoteže u poprečnom presjeku spregnutoga nosača

Promatra se spregnuti nosač s poznatim dimenzijama poprečnoga presjeka, opterećenjem, mehaničkim karakteristikama materijala i poznatim uvjetima razvoja skupljanja i pužanja betona. U poprečnom se presjeku mogu postaviti jednadžbe ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila, uvjeti kompatibilnosti deformacija i konstitucijske relacije naprezanje-deformacija. Pritom se pretpostavlja da vrijedi Bernoullijeva hipoteza ravnih presjeka (linearnost raspodjele deformacija po visini poprečnoga presjeka). Linearnost deformacija vrijedi za čitav presjek, samo što skokovita promjena ukupnih deformacija može biti posljedica neistodobnoga aktiviranja naprezanja u pojedinim dijelovima/materijalima spregnutog presjeka (slika 2.).



Slika 2. Presjek i deformacije spregnutoga nosača

Međutim, za inkrementalni je oblik jednadžbi prirast deformacija linearna funkcija za sve aktivne dijelove presjeka, pa u općem slučaju vrijedi [8]

$$\Delta \varepsilon_k = \Delta \varepsilon_{c,k} = \Delta \varepsilon_{a,k} = \Delta \varepsilon_{s,k} = \Delta \varepsilon_{p,k} = \Delta \varepsilon_{r,k} + \Delta \kappa_k \cdot y \quad (14)$$

gdje su:

$\Delta \varepsilon_k$ - prirast deformacije promatranoga vlakna presjeka za tekući vremenski interval

$\Delta \varepsilon_{r,k}$ - prirast deformacije u razini referentne osi presjeka $r(y=0)$

$\Delta \kappa_k$ - zakrivljenost presjeka

y - razmak promatranoga vlakna od referentne osi r .

U skladu s linearnom raspodjelom deformacija i naprezanja su po visini poprečnoga presjeka raspodijeljena linearno. Međutim, prirast naprezanja za svaki dio spregnutoga presjeka (c – beton, a – konstrukcijski čelik, s – meki čelik, p – prednapeti čelik) definira se posebnim parom parametara $\Delta \alpha_{r,k}$ i $\Delta \beta_k$ u skladu s konstitucijskim relacijama naprezanje-deformacija. Ako se izrazi napišu u vektorskom obliku, jednadžbe imaju sljedeće oblike, izrazi (15) do (18), prema [13]:

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{pmatrix}_{a,k} = E_a \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{pmatrix}_{a,k} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{pmatrix}_{s,k} = E_s \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{pmatrix}_{s,k} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{pmatrix}_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \left(\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{pmatrix} \right)_{c,k} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{pmatrix}_{p,k} = E_p \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{pmatrix}_{p,k} + \begin{pmatrix} \Delta \bar{\sigma}_{pr} \\ 0 \end{pmatrix}_{p,k} \quad (18)$$

Vektor promjene slobodnih deformacija, kad je deformacija skupljanja jednaka za sve točke po visini poprečnoga presjeka, ima oblik dan u izrazu (19):

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{pmatrix}_{c,k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} \begin{pmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{pmatrix}_{c,i} + \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{pmatrix}_{c,k} \quad (19)$$

Za k -ti interval vremena i prihvaćenu referentnu os r u poprečnom se presjeku mogu postaviti dva uvjeta ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila: za zbroj sila na pravcu uzdužne osi nosača i za zbroj momenata savijanja oko referentne osi. Nakon integracije postavljenih uvjeta i sređivanja izraza, veza je između promjene deformacija i promjene sila u tekućemu vremenskom intervalu dana izrazom (20):

$$\mathbf{K}_k \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{pmatrix}_k - \begin{pmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{pmatrix}_{c,k} - \begin{pmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{pmatrix}_{p,k} \quad (20)$$

Matrica je krutosti poprečnoga presjeka dana izrazom (21):

$$\mathbf{K}_k = E_{c(k,k-1)} \mathbf{D}_c + E_a \mathbf{D}_a + E_s \mathbf{D}_s + E_p \mathbf{D}_p \quad (21)$$

gdje su matrice geometrijskih karakteristika pojedinih komponenata presjeka oblika dane izrazom (22):

$$\mathbf{D}_m = \begin{pmatrix} A & S \\ S & I_m \end{pmatrix} \quad m = c, a, s, p \quad (22)$$

Matrica krutosti je promjenjiva u vremenu samo zbog promjene poopćenoga modula deformacije betona $E_{c(k,k-1)}$, dok su ostale komponente u svim vremenskim intervalima konstantne. Poseban je slučaj neistodobno aktiviranje naprezanja u pojedinim dijelovima presjeka, što je dodatni razlog za promjenu matrice krutosti tako formiranoga spregnutog presjeka.

Vektor je promjene fiktivnih sila zbog reoloških karakteristika betona i prednapetoga čelika dan izrazima (23) i (24):

$$\begin{pmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{pmatrix}_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \mathbf{D}_c \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{pmatrix}_{c,k} \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{pmatrix}_{p,k} = \begin{pmatrix} A \\ S \end{pmatrix}_p \Delta \bar{\sigma}_{pr,k} \quad (24)$$

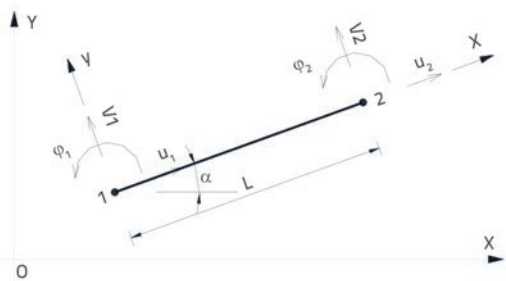
Prikazani algoritam proračuna, za dane vrijednosti sila u poprečnom presjeku, nema posebnih dodatnih ograničenja. Diskontinuirane se promjene uvode s pomoću fiktivnih intervala vremena, i to su specijalni slučajevi, u kojima se izrazi svode na standardne elastične oblike veza. Međutim, kod statički neodređenih nosača, zbog reoloških karakteristika betona i prednapetoga čelika dolazi do promjene sila u presjecima i bez promjene opterećenja. Analizom stanja u presjeku na prije prikazani način nije moguće obuhvatiti promjenu tih sila, nego je nužno promatrati konstrukciju kao cjeloviti sistem. Za tako složene analize najčešće se upotrebljavaju metoda sila i metoda pomaka, za koje su osnovne jednadžbe elastičnosti proširene na jednadžbe viskoelastičnosti [2]. Međutim, tek je razvoj numeričkih metoda pružio pogodnost za poopćenje proračunskih modela i uporabu računala.

4. Jednadžbe ravnoteže spregnutoga uslojenog konačnog elementa

Primjena metode konačnih elemenata podrazumijeva diskretizaciju kontinuuma na elemente konačnih dimenzija.

Skup svih konačnih elemenata međusobno spojenih u čvorovima čini mrežu konačnih elemenata promatrane konstrukcije. U dobivenom sustavu algebarskih jednažbi za nepoznanice se uzimaju veličine vezane za čvorove elemenata [3]. Primjena metode konačnih elemenata za promatrani problem zahtijeva uvođenje određenih pretpostavki [13]:

- analiza se odnosi na linijske konačne elemente koje u općem slučaju čine spregnuti betonski i čelični dio s dodatnim prednapetim i mekim čelikom. Pretpostavlja se da je ostvareno potpuno sprezanje, tj. za tekući k -ti vremenski interval vrijedi jednakost prirasta deformacija ($\Delta \epsilon_{c,k} = \Delta \epsilon_{a,k} = \Delta \epsilon_{s,k} = \Delta \epsilon_{p,k} = \Delta \epsilon_k$);
- vrijedi Bernoullijeva pretpostavka o ravnim presjecima i linearnost promjene dilatacije po visini spregnutoga presjeka (može se zanemariti utjecaj posmika na deformaciju konačnoga elementa);
- diskretizacija se provodi po duljini konstrukcijskoga elementa, a u slojeve po visini poprečnoga presjeka uz uzdužne je dilatacije uveden i doprinos zakrivljenosti, dok je zanemaren doprinos zaokretanja presjeka;
- spregnuti se elementi aproksimiraju ravnim konačnim elementima u ravnini xOy , pri čemu neka točka u elementu ima tri stupnja slobode gibanja: horizontalni pomak $u(x)$, vertikalni pomak $v(x)$ i zaokretanje presjeka $\varphi(x)$. Kada se za nepoznate veličine uzmu pomaci, linijski konačni element u općem slučaju ima šest stupnjeva slobode gibanja, u svakom čvoru po tri nepoznata poopćena pomaka ($u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2$) (slika 3.).



Slika 3. Linijski konačni element

Za dogovor o predznacima primjenjuje se sljedeće pravilo: pomaci u i v, sile N i T, naprezanja σ i njima odgovarajuće deformacije ϵ pozitivni su u smislu pozitivnih osi koordinatnoga sustava. Zaokretanje φ , moment savijanja M, nagib dijagrama naprezanja β i zakrivljenost κ pozitivni su kad im je smisao vrtnje suprotan od smisla vrtnje kazaljke na satu. Naprezanja i deformacije odnose se isključivo na lokalni koordinatni sustav. Prema takvu dogovoru, deformacije su skupljanja betona ϵ_{cn} u početnom (prvom) čvoru promatranoga konačnoga elementa pozitivne, a u krajnjem (drugom) negativne. Isto pravilo vrijedi i za promjenu naprezanja $\Delta \sigma_{pr}$ pri relaksaciji prednapetoga čelika. Inkrementalna veza između komponenata deformacije (dilatacije i zakrivljenosti) i pomaka (uzdužnoga i poprečnoga) promatranog konačnoga elementa u tekućem k -tom vremenskom intervalu u transponiranom je obliku

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon(x) \\ \Delta \kappa(x) \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \frac{d\Delta u_T(x)}{dx} & \frac{d^2 \Delta v(x)}{dx^2} \end{Bmatrix}_k^T \tag{25}$$

Promjene parametara pomaka uzduž elementa $\Delta u(x)$ i $\Delta v(x)$ definiraju se s pomoću pretpostavljenoga polja pomaka konačnog elementa. Polje pomaka određeno je interpolacijskim funkcijama (funkcijama oblika) [3]. Uz pretpostavku da je rotacija presjeka odgovarajuća derivacija pomaka, tj. da je $\Delta \varphi(x)_k = -\delta v(x)_k / \delta x$, oblikuju se interpolacijske matrice **N**. Te matrice u promatranom k -tom vremenskom intervalu daju vezu između vektora pomaka $\Delta q(x)_k$ u polju elementa i vektora čvornih pomaka Δq_k . Na osnovi diferencijalnih veza, danih izrazom (25), može se postaviti veza između deformacijskih komponenata uzduž osi štapa i komponenata pomaka čvornih točaka, kako je dano u izrazu (26):

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon(x) \\ \Delta \kappa(x) \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dx} (\mathbf{N}_u \mathbf{q}_u) & -\frac{d^2}{dx^2} (\mathbf{N}_v \mathbf{q}_v) \end{Bmatrix}_k^T \tag{26}$$

Kad se pretpostavi da se pomak čvorne točke konačnoga elementa odnosi na pomak točke po referentnoj osi r i kada se u izrazu (26) provedu odgovarajuća deriviranja, uz kraća obilježavanja, postavlja se veza između osnovnih deformacijskih veličina $\Delta \epsilon_r$ i $\Delta \kappa$ točaka polja elementa i vektora čvornih pomaka $\Delta \mathbf{q}_r$ u obliku prikazanom izrazom (27):

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = \mathbf{B}_r \Delta \mathbf{q}_{r,k} \tag{27}$$

gdje matrica **B_r** ima komponente

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}_r \tag{28}$$

U skladu s prihvaćenom pretpostavkom o ravnim presjecima, dilatacija u proizvoljno odabranoj točki presjeka, $\Delta \epsilon(x,y)$, određuje se iz izraza (29):

$$\Delta \epsilon_k = (\Delta \epsilon_r + \Delta \kappa y)_k = \begin{bmatrix} 1 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k \tag{29}$$

Kada se jednažba (27) uvrsti u (29), dilatacija u točki presjeka konačnoga elementa ima oblik prikazan izrazom (30):

$$\Delta \epsilon_k = \mathbf{P} \mathbf{B}_r \Delta \mathbf{q}_{r,k} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{r,k} \tag{30}$$

gdje matrica **G** za dilataciju proizvoljno odabrane točke ima komponente

$$\mathbf{G} = \left[-\frac{1}{L} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) y \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) y \quad \frac{1}{L} \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) y \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) y \right] \quad (31)$$

Matrični oblik izraza (30) daje vezu između prirasta dilatacija $\Delta \varepsilon_k$ proizvoljno odabrane točke u polju konačnoga elementa i prirasta pomaka njegovih čvorova u promatranom k -tom vremenskom intervalu. Sve što je prethodno istaknuto vrijedi za sve komponentne materijale (c – beton, a – konstrukcijski čelik, s – meki čelik, p – prednapeti čelik).

Prema prihvaćenoj pretpostavci o potpunom (krutom) sprezanju, u kojemu su prirasti deformacija svih dijelova/slojeva spregnutoga presjeka u promatranj referentnoj osi međusobno jednaki, vrijedi i jednakost pomaka za tekući k -ti vremenski interval:

$$\Delta \mathbf{q}_{r,c,k} = \mathbf{q}_{r,a,k} = \mathbf{q}_{r,s,k} = \mathbf{q}_{r,p,k} = \mathbf{q}_{r,k} \quad (32)$$

Inkrementalna veza između naprezanja i čvornih pomaka betonskoga dijela presjeka (nakon uvrštavanja izraza (30) u izraz (3) i uzevši u obzir navedenu jednakost pomaka) ima oblik

$$\Delta \sigma_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \mathbf{G} (\Delta \mathbf{q}_{r,k} - \Delta \mathbf{q}_{r,c,k}^*) \quad (33)$$

gdje je veza slobodnih deformacija i slobodnih pomaka oblika:

$$\Delta \varepsilon_{c,k}^* = \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{r,c,k}^* \quad (34)$$

Na sličan se način mogu napisati inkrementalne veze i za ostale slojeve/materijale spregnutoga elementa:

$$\Delta \sigma_{a,k} = E_a \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{r,k} \quad (35)$$

$$\Delta \sigma_{s,k} = E_s \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{r,k} \quad (36)$$

$$\Delta \sigma_{p,k} = E_p \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{r,k} + \Delta \bar{\sigma}_{pr,k} \quad (37)$$

Teorijska je osnova na kojoj se temelji metoda konačnih elemenata princip o minimumu energije pri varijaciji pomaka, odnosno princip jednakosti prirasta rada vanjskih sila na zadanim pomacima i prirasta rada unutarnjih sila na odgovarajućim deformacijama [3]. U općem slučaju treba zbrojiti radove za sve slojeve/materijale spregnutoga elementa (c – beton, a – konstrukcijski čelik, s – meki čelik, p – prednapeti čelik). U daljnjem izvođenju izraza primjenjuju se odgovarajuće zamjene, virtualni pomaci i Lagrangeov teorem. Transformacijom umnožaka matrica pod integralima (skalari) i primjenom principa o minimumu ukupne promjene potencijalne energije $\delta \Delta \Pi = 0$ te diferenciranjem izraza po $\Delta \mathbf{q}_{r,k}^*$ dobiva se

$$\mathbf{K}_k \Delta \mathbf{q}_{r,k} + \Delta \mathbf{Q}_{c,k}^* + \Delta \mathbf{Q}_{p,k}^* = \Delta \mathbf{Q}_k \quad (38)$$

gdje su:

\mathbf{K}_k – matrica krutosti spregnutoga konačnoga elementa

$\Delta \mathbf{Q}_k$ – vektor vanjskih čvornih sila

$\Delta \mathbf{Q}_{c,k}^*$ – vektor fiktivnih čvornih sila zbog puzanja i skupljanja betona

$\Delta \mathbf{Q}_{p,k}^*$ – vektor fiktivnih čvornih sila zbog relaksacije prednapetoga čelika.

Izraz (38) predstavlja poopćeni uvjet ravnoteže linijskog uslojenoga (spregnutog) konačnoga elementa u lokalnom koordinatnom sustavu.

4.1. Matrica krutosti uslojenoga konačnoga elementa

Matrica je krutosti spregnutoga konačnoga elementa \mathbf{K}_k , za opći slučaj, napisana kao zbroj udjela betona te konstrukcijskog, mekog i prednapetog čelika

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_{c,k} + \mathbf{K}_{a,k} + \mathbf{K}_{s,k} + \mathbf{K}_{p,k} \quad (39)$$

Komponente matrice krutosti za pojedine slojeve/materijale spregnutoga konačnoga elementa, nakon provedene integracije, imaju oblik (indeks m zamjenjuje indekse c, a, s, p)

$$\mathbf{K}_{m,k} = \frac{E_m}{L^3} \begin{bmatrix} A_m L^2 & 0 & -S_m L^2 & -A_m L^2 & 0 & S_m L^2 \\ & 12 I_m & 6 I_m L & 0 & -12 I_m & 6 I_m L \\ & & 4 I_m L^2 & 0 & -6 I_m L & 2 I_m L^2 \\ & & & A_m L^2 & 0 & -S_m L^2 \\ & & & & 12 I_m & -6 I_m L \\ & & & & & 4 I_m L^2 \end{bmatrix}_k \quad (40)$$

Koeficijenti matrice krutosti (40) razlikuju se od koeficijenata matrice krutosti homogenoga štapa za član $E_{m,k} S_{m,k} / L$. Veličina $S_{m,k}$ je statički moment površine poprečnog presjeka u odnosu na referentnu os r . S pomoću tog člana uvodi se utjecaj visinskog položaja pojedinih slojeva u spregnutom presjeku.

4.2. Vektori čvornih sila za slojeviti konačni element

Vektor je čvornih sila od vanjskoga opterećenja u transponiranu obliku (radi lakšega prikaza)

$$\Delta \mathbf{Q}_k = \left[\Delta N_1 \quad \Delta T_1 \quad \Delta M_1 \quad \Delta N_2 \quad \Delta T_2 \quad \Delta M_2 \right]_k^T \quad (41)$$

U skladu s koncepcijom metode konačnih elemenata, opterećenje polja elementa zamjenjuje se ekvivalentnim komponentama čvornih sila. Na odgovarajući se način bilo koje opterećenje elementa može zamijeniti ekvivalentnim čvornim opterećenjem [3]. Vektor je čvornih fiktivnih sila betonskoga dijela presjeka:

$$\Delta \mathbf{Q}_{c,k}^* = \left[\Delta N_1^* \quad \Delta T_1^* \quad \Delta M_1^* \quad \Delta N_2^* \quad \Delta T_2^* \quad \Delta M_2^* \right]_{c,k}^T = -\mathbf{K}_{c,k} \Delta \mathbf{q}_{r,c,k}^* \quad (42)$$

Pojava fiktivnih čvornih sila u skladu je s promjenama u elementu zbog skupljanja i puzanja betona u promatranom

intervalu. Tim se silama može dati i fizička interpretacija [13]. Prema definiciji, slobodne deformacije, odnosno slobodni pomaci izazvani su skupljanjem i puzanjem betona, a ne neposrednim djelovanjem vanjskoga opterećenja. Ako se pretpostavi da su slobodni pomaci betona privremeno spriječeni uvođenjem fiktivnih unutarnjih veza, zbog reoloških karakteristika betona dolazi do postupne promjene naprezanja, odnosno promjene fiktivnih sila. Tim se silama poništavaju slobodni pomaci. Kako u promatranom elementu ne postoje fiktivni uvjeti koji sprečavaju slobodne pomake, treba spomenute uvjete ukloniti, tj. treba nanijeti negativne vrijednosti fiktivnih sila u čvorovima kojima se poništava djelovanje reakcija fiktivnih uvjeta.

Direktno određivanje fiktivnih sila primjenom desnoga dijela jednadžbe (42), za prihvaćeni model konačnoga elementa, zahtijeva prethodno određivanje vektora slobodnih pomaka čvornih točaka $\Delta \mathbf{q}_{r,c,k}^*$. Međutim, iz izraza (33) i (34) ti se pomaci ne mogu odrediti, jer nije poznata \mathbf{G}^{-1} . U tako definiranim uvjetima fiktivne se sile mogu odrediti jedino preko slobodnih deformacija betonskoga dijela presjeka. Zbog toga dio jednadžbe (38) kojim su definirane fiktivne sile treba u postupku sređivanja izraza vratiti korak unazad, tj.

$$\Delta \mathbf{Q}_{c,k}^* = -\mathbf{K}_{c,k} \Delta \mathbf{q}_{r,c,k}^* = - \int_{V_c} \mathbf{G}^T E_{c(k,k-1)} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{pmatrix}_{c,k} dV_c \quad (43)$$

Slobodne deformacije betonskoga dijela presjeka mogu se odrediti iz matičnog oblika izraza (4) u kojem je komponentom $\Delta \kappa$ definirana promjena deformacije po visini poprečnog presjeka. Prema osnovnim pretpostavkama metode konačnih elemenata, ti se presjeci odnose na presjeka u čvorovima elementa. Međutim, određivanje fiktivnih sila prema jednadžbi (43) traži integraciju po zapremini betonskoga dijela/sloja elementa. Taj zahtjev, uz poznavanje promjene deformacije po visini traži i poznavanje promjene deformacije uzduž elementa. Prema prihvaćenom modelu metode konačnih elemenata, vanjsko se opterećenje polja elementa zamjenjuje ekvivalentnim silama u čvornim točkama. Osim toga, uvođenjem funkcija oblika postavljena je veza između pomaka točaka u polju elementa i pomaka čvornih točaka. Na sličan način se može postaviti veza između slobodnih deformacija u polju elementa i odgovarajućih vrijednosti tih deformacija na krajevima štapa, tj. u čvorovima 1 i 2 elementa. Dovoljna se točnost postiže primjenom linearne veze, tj. funkcije varijable x :

$$\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{pmatrix}_{c,k} = \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{r1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \end{pmatrix}_{c,k} + \left(\begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{r2}^* \\ \Delta \kappa_2^* \end{pmatrix}_{c,k} - \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{r1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \end{pmatrix}_{c,k} \right) \frac{x}{L} \quad (44)$$

Uvrštavanjem izraza (44) u (43) i njegovom integracijom određuju se komponente čvornih fiktivnih sila:

$$\Delta \mathbf{Q}_{c,k}^* = \begin{pmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{pmatrix}_{c,k} = -E_{c(k,k-1)} \begin{pmatrix} \frac{A}{2} & -\frac{S}{2} & -\frac{A}{2} & -\frac{S}{2} \\ \frac{S}{L} & \frac{I}{L} & -\frac{S}{L} & -\frac{I}{L} \\ S & I & 0 & 0 \\ \frac{A}{2} & \frac{S}{2} & \frac{A}{2} & \frac{S}{2} \\ -\frac{S}{L} & -\frac{I}{L} & \frac{S}{L} & \frac{I}{L} \\ 0 & 0 & -S & -I \end{pmatrix}_{c,k} \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{r1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \\ \Delta \varepsilon_{r2}^* \\ \Delta \kappa_2^* \end{pmatrix}_{c,k} \quad (45)$$

Izrazom (45) fiktivne su sile potpuno određene. Preko statičkoga momenta površine $S_{c,k}$ uvodi se utjecaj visinskog položaja betonskog dijela/materijala u odnosu na referentnu os. Fiktivne normalne sile su konstantne i osrednjene uzduž promatranog konačnog elementa, što je u skladu s prihvaćenim pretpostavkama. Ovo osrednjavanje utječe na točnost postupka proračuna. Uvođenjem finije podjele i povećanjem broja konačnih elemenata povećava se i točnost proračunskog modela. Vektor je prirasta fiktivnih sila zbog relaksacije prednapetoga čelika dan je izrazom (46):

$$\Delta \mathbf{Q}_{p,k}^* = \int_{V_p} \mathbf{G}^T \Delta \bar{\sigma}_{pr,k} dV_p \quad (46)$$

Dovoljna se točnost postiže ako se za promjenu relaksacije uzduž elementa uzme linearna funkcija varijable x :

$$\Delta \bar{\sigma}_{pr,k} = \Delta \bar{\sigma}_{pr1,k} + \left(\Delta \bar{\sigma}_{pr2,k} - \Delta \bar{\sigma}_{pr1,k} \right) \frac{x}{L} \quad (47)$$

Uvrštavanjem izraza (47) u jednadžbu (46) i njezinom integracijom dobiva se

$$\Delta \mathbf{Q}_{p,k}^* = \begin{pmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{pmatrix}_{p,k} = \begin{pmatrix} -\frac{A}{2} & -\frac{A}{2} \\ \frac{S}{L} & -\frac{S}{L} \\ S & 0 \\ \frac{A}{2} & \frac{A}{2} \\ -\frac{S}{L} & -\frac{S}{L} \\ 0 & -S \end{pmatrix}_{p,k} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\sigma}_{pr1} \\ \Delta \bar{\sigma}_{pr2} \end{pmatrix}_{k} \quad (48)$$

U ovom postupku se s pomoću statičkoga momenta površine $S_{p,k}$ uvodi utjecaj visinskog položaja prednapetoga čelika u odnosu na referentnu os. Fiktivne su normalne sile konstantne uzduž promatranoga konačnog elementa, što je u skladu s prihvaćenim pretpostavkama. Fizička interpretacija pojave fiktivnih sila zbog relaksacije prednapetoga čelika analogna je onoj opisanoj za betonski dio presjeka. Nanošenjem negativnih vrijednosti ukupnih unutarnjih sila, osnovna jednadžba konačnih elemenata poprima oblik prikazan izrazom (49):

$$\mathbf{K}_k \Delta \mathbf{q}_{r,k} = \Delta \mathbf{Q}_k - \Delta \mathbf{Q}_{c,k}^* - \Delta \mathbf{Q}_{p,k}^* \quad (49)$$

gdje matrica krutosti daje vezu između čvornih sila i čvornih pomaka. Prethodna je jednadžba ustvari sustav algebarskih jednadžbi u kojima su, osim elastičnih karakteristika materijala, uvedena i reološka svojstva betona i prednapetoga čelika.

Diskontinuirane promjene opterećenja uvode se s pomoću fiktivnih intervala vremena $\Delta t_k = 0$. Za fiktivne se sile tada dobivaju nulte vrijednosti. Taj je slučaj ustvari poznati sustav jednadžbi za konačne elemente s elastičnim karakteristikama materijala:

$$\mathbf{K}_k \Delta \mathbf{q}_{r,k} = \Delta \mathbf{Q}_k \quad (50)$$

Za interval vremena konačne duljine ($\Delta t_k > 0$) vanjsko opterećenje najčešće nema utjecaja. Prisutne su samo fiktivne sile. Za taj se slučaj osnovna jednadžba konačnih elemenata svodi na jednadžbu za viskoelastične materijale:

$$\mathbf{K}_k \Delta \mathbf{q}_{r,k} = -\Delta \mathbf{Q}_{c,k}^* - \Delta \mathbf{Q}_{p,k}^* \quad (51)$$

5. Jednadžbe ravnoteže sustava konačnih elemenata

Primjena metode konačnih elemenata podrazumijeva da se promatrana konstrukcija (sustav) podijeli na elemente koji tvore mrežu konačnih elemenata. Oblikovanje sustava jednadžbi mreže konačnih elemenata zahtijeva prethodno oblikovanje osnovnih jednadžbi svakog konačnog elementa. Za postavljanje jednadžbi ravnoteže sustava nužno je matricu krutosti i vektore sila za svaki konačni element transformirati iz lokalnoga u globalni koordinatni sustav [3].

Jednadžba ravnoteže sistema (matricni oblik) dobiva se tako da se matrice krutosti i vektori sila iz izraza (49) za svaki konačni element superponiraju u skladu s kriterijem povezanosti čvorova sustava [3]. Postavljanjem komponenata matrice krutosti i vektora sila konačnoga elementa na odgovarajuće položaje oblikuje se poopćena jednadžba ravnoteže za spregnuti sistem u cjelini:

$$\tilde{\mathbf{K}}_k \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{r,k} = \Delta \tilde{\mathbf{Q}}_k - \Delta \tilde{\mathbf{Q}}_{c,k}^* - \Delta \tilde{\mathbf{Q}}_{p,k}^* \quad (52)$$

Prethodnom jednadžbom obuhvaćena su elastična i viskoelastična svojstva spregnutih materijala. Viskoelastične promjene obuhvaćene su vremenskim intervalima konačne duljine ($\Delta t_k > 0$), a elastične (diskontinuirane) promjene obuhvaćene su fiktivnim vremenskim intervalima ($\Delta t_k = 0$).

5.1. Vektor fiktivnih sila za sustav

Pri izračunavanju komponenata vektora fiktivnih sila, s obzirom na reologiju betona i prednapetoga čelika, primjenom izraza (45) i (48) unosi se određena pogreška kako bi se provelo osrednjavanje uzdužnih sila svakog konačnog elementa za opći slučaj složenog savijanja, s tim da je pogreška manja za finiju podjelu konstrukcije. Nakon što se neposrednom primjenom

izraza (45) i (48) dobivaju osrednjene vrijednosti, stvarne vrijednosti fiktivnih uzdužnih sila ostaju nepoznate (slike 4. i 5.), tj. nepoznata je njihova raspodjela uzduž svakog promatranog konačnog elementa.

Ovdje je izvršeno poboljšanje proračunskoga modela kojim se povećava točnost rezultata i bez bitnoga povećanja broja konačnih elemenata u sistemu. Tim se poboljšanim postupkom najprije izračunavaju stvarne fiktivne uzdužne sile (slike 4. i 5.), a potom se osrednjavaju i upotrebljavaju u onom koraku proračuna u kojem treba zadovoljiti uvjete ravnoteže metode konačnih elemenata. U sljedećem se koraku izračunavaju osrednjene dilatacije, a nakon toga se uvode njihovi popravci u čvorovima (obrnuti postupak osrednjavanja).

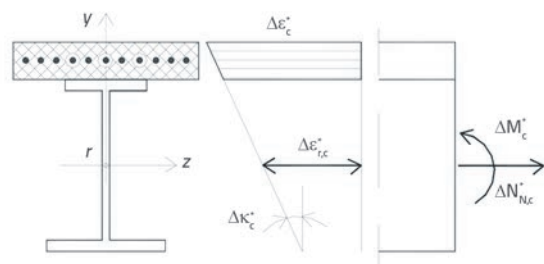
Stvarne vrijednosti fiktivnih uzdužnih sila u promatranom konačnom elementu mogu se dobiti iz izraza (45) ako se isključi utjecaj komponenata deformacija jednog čvora na drugi, tj. kada odgovarajući koeficijenti matrice krutosti betonskoga sloja poprime nulte vrijednosti:

$$\Delta \mathbf{Q}_{c,k}^* = -E_{c(k,k-1)} \begin{pmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{pmatrix}_{c,k} = \begin{pmatrix} -A & -S & 0 & 0 \\ S & I & -S & -I \\ L & L & -L & -L \\ S & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & S \\ -S & -I & S & I \\ L & L & L & L \\ 0 & 0 & -S & -I \end{pmatrix}_{c,k} \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{r1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \\ \Delta \varepsilon_{r2}^* \\ \Delta \kappa_2^* \end{pmatrix}_{c,k} \quad (53)$$

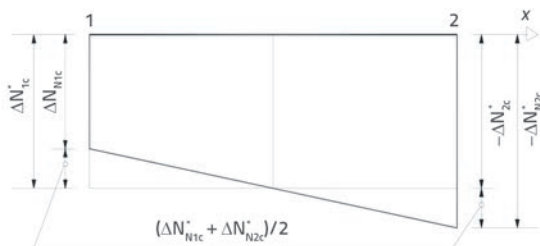
Međutim, s tako izračunanim fiktivnim silama uvjet ravnoteže promatranoga konačnog elementa u uzdužnom smjeru nije zadovoljen. Zbog toga u sljedećem koraku proračuna treba provesti osrednjavanje uzdužne sile (slika 2.):

$$\Delta N_{1c,k}^* = -\Delta N_{2c,k}^* = \frac{(\Delta N_{N1c}^* - \Delta N_{N2c}^*)_k}{2} \quad (54)$$

Za ilustraciju modela proračuna uzet je primjer nosača/grede tako da su konačni elementi postavljeni u nizu/pravcu (slika 6.a.). Dijagram momenata savijanja u prvom/fiktivnom vremenskom intervalu od zadanoga opterećenja (trenutno elastično stanje) prikazan je na slici 3.b. U drugom/konačnom vremenskom intervalu, primjenom izraza (5), izračunavaju se slobodne deformacije betonskoga dijela presjeka (slika 4.), a zatim se iz izraza (53) određuju fiktivne sile u čvorovima konačnog elementa (slike 6.c. i 6.d.).

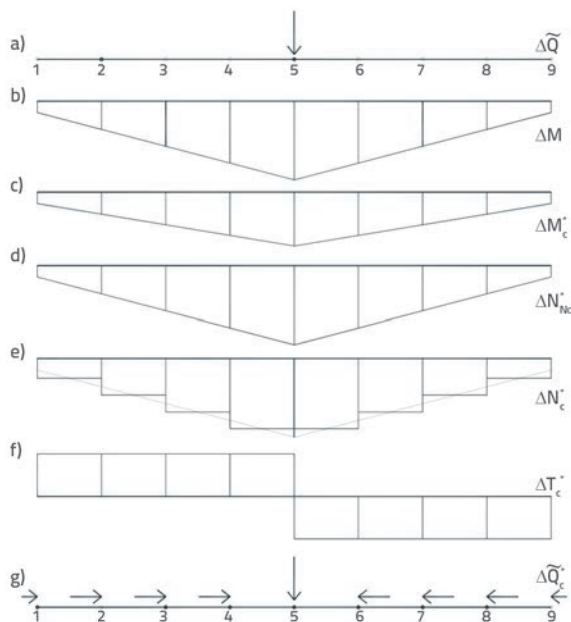


Slika 4. Slobodne deformacije betona i fiktivne sile



Slika 5. Fiktivne uzdužne sile konačnoga elementa (stvarne i osrednjene)

U drugom (konačnom) intervalu vremena, zbrajanjem sila koje pripadaju istom čvoru fiktivne se uzdužne sile poništavaju, jer su za čvorni presjek dva susjedna konačna elementa ove sile istoga intenziteta, a suprotnog smisla djelovanja (slika 6.d.). Fiktivni se momenti savijanja također poništavaju (slika 6.c.), ali samo prividno, jer se ovi momenti adekvatno uvode u proračun preko poprečnih sila (slika 6.f.). Ako se ne bi provelo osrednjavanje fiktivnih uzdužnih sila svakoga konačnog elementa, u sumarna naprezanja i deformacije ne bi bili uvedeni doprinosi tih sila. To bi dovelo do znatnijega odstupanja od uobičajene točnosti rezultata proračuna. Promatrani konačni element prema prihvaćenu modelu ne može imati promjenljivu uzdužnu silu. Osrednjavanje uzdužnih sila, prema izrazu (54), dovodi do zamjenjujućega (stepeničastog) dijagrama tih sila (slika 6.e.), tako da se njihovim zbrajanjem u čvorovima (slika 6.g.) dobivaju konačne vrijednosti. Time se doprinos utjecaja fiktivnih uzdužnih sila uvodi u daljnji postupak proračuna, što dovodi do rezultata zadovoljavajuće točnosti.



Slika 6. Fiktivne sile spregnutih konačnih elemenata u nizu/pravcu

Da bi se povećala točnost rezultata i za sustave s manjim brojem konačnih elemenata, za svaki promatrani konačni element

na osrednjeni dijagram pri izračunavanju dilatacije za tekući vremenski interval treba dodati (ili oduzeti) prirast dilatacije $\Delta\varepsilon_{N,k}$ (slike 5. i 6.e.):

$$\Delta\varepsilon_{N,k} = \frac{1}{E_r A_k} \cdot \left(\frac{\Delta N_{N1}^* + \Delta N_{N2}^*}{2} \right)_k \quad (55)$$

Na taj se način ponovo oblikuje nagnuti dijagram uzduž konačnoga elementa, što dovodi do zadovoljavajuće točnosti za uobičajene analize spregnutih konstrukcija u praksi. Analogni postupak primjenjuje se i na vektor $\Delta Q_{p,k}^*$ zbog relaksacije prednapetoga čelika.

6. Stanje naprezanja i deformacija

Rješenjem sustava algebarskih jednadžbi (52) određuje se vektor pomaka čvorova sustava za tekući vremenski interval. Prije toga treba uvesti rubne uvjete po pomacima i/ili silama i eliminirati poznate uvjete, jer je matrica krutosti singularna. Komponentne deformacije promatranoga konačnog elementa mogu se odrediti nakon izdvajanja vektora pomaka za njegove čvorne točke. Te pomake treba transformirati iz globalnoga u lokalni koordinatni sustav [3].

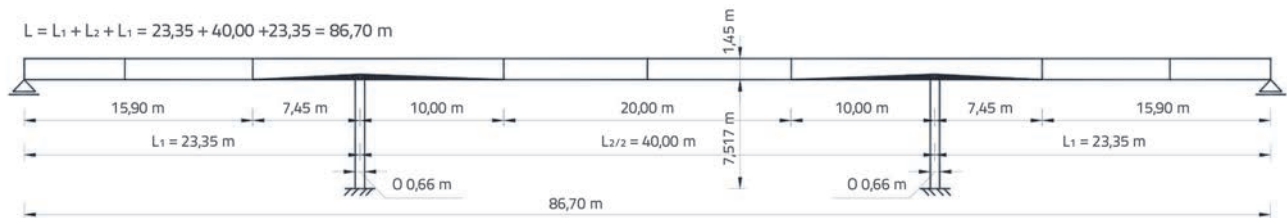
Ako je u postupku proračuna vanjsko opterećenje polja elementa uvedeno s pomoću ekvivalentnih čvornih sila, pri čemu su uvedeni momenti ΔM_M , i ako je prethodno provedeno osrednjavanje fiktivnih normalnih sila ΔN_{M_r} u izraz za izračunavanje deformacije promatranoga konačnog elementa treba uvesti dio deformacije $\Delta\varepsilon_{N,k}$ i dio zakrivljenosti $\Delta\kappa_{M,k}$ tj.:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \Delta\kappa_k \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_r \Delta\mathbf{q}_{r,k} + \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_N \\ \Delta\kappa_M \end{Bmatrix}_k \quad (56)$$

Izračunani parametri promjene deformacije promatranoga konačnog elementa, u skladu s pretpostavkom o jednakosti deformacija, vrijede za sve slojeve/materijale presjeka. Međutim, naprezanja je nužno određivati posebno za svaki sloj presjeka, pri čemu se primjenjuju inkrementalni oblici veze naprezanje-deformacija za pojedine materijale (konstrukcijski čelik, meki čelik, beton i prednapeti čelik) dani izrazima (15-18). Naprezanja po visini pojedinih slojeva linearno se mijenjaju, dok se zbog različitih fizikalno-mehaničkih karakteristika materijala na kontaktima slojeva javljaju skokovi.

Parametri ukupnih naprezanja i deformacija za diskretni trenutak vremena t_k određuju se superpozicijom prethodnog stanja i prirasta stanja u tekućem vremenskom intervalu (step-by-step) za svaki sloj/materijal ($m = a, c, s, p$):

$$\begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_{k-1} + \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_k \quad (57)$$



Slika 7. Uzdužna dispozicija mosta

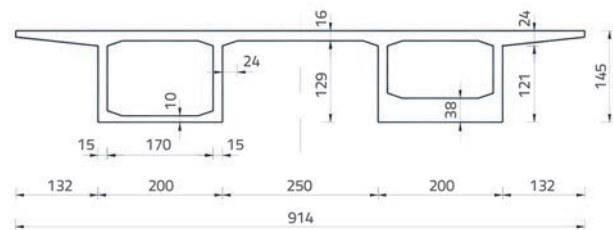
$$\left| \frac{\varepsilon_r}{\kappa} \right|_k = \left| \frac{\varepsilon_r}{\kappa} \right|_{k-1} + \left| \frac{\Delta \varepsilon_r}{\Delta \kappa} \right|_k \quad (58)$$

Za dijelove/slojeve presjeka u kojima su naprezanja istodobno aktivirana, u liniji spreznja nema skokovite promjene ukupne deformacije. Međutim, kako prikazani model proračuna, ovisno o tehnološkom postupku pri izvođenju, podržava i naknadna uključanja pojedinih dijelova presjeka, tada se kod ukupne deformacije na kontaktima javljaju skokovi. Izloženi je postupak proračuna automatiziran te su autori razvili računalni program kojim se mogu rješavati uobičajeni problemi u inženjerskoj praksi.

7. Numeričke analize i razmatranje rezultata

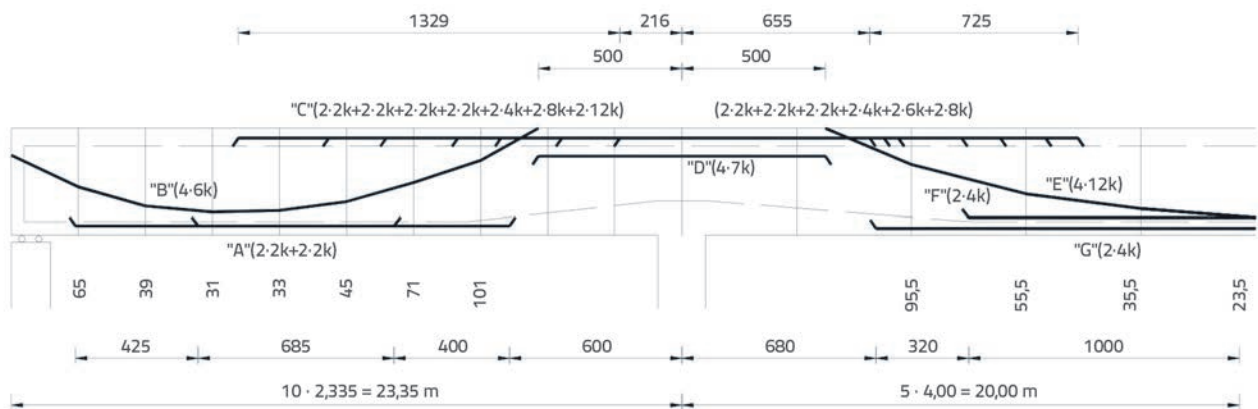
Da bi se ilustrirala primjena prikazanoga postupka proračuna, uzet je primjer kontinuirane spregnute okvirne konstrukcije mosta ($L = 23,35 + 40,00 + 23,35 = 86,70$ m) od prednapetoga betona (slika 7. – uzdužni presjek, slika 8. – poprečni presjeci grede u polju i iznad stupova), preuzet iz [2], kako bi se mogla provjeriti točnost razvijenoga modela proračuna.

Prednapinjanje grede izvedeno je kabelima od 12 žica $\phi 5$ mm. Jedan kabel unosi normalnu silu u gredu od $P = 240$ kN u težištu kabela. Kabeli su raspoređeni u sedam grupa koje su označene slovima od A do G (slike 9. i 10.). Grupe A, C, D, F i G su s ravnim kabelima, pri čemu je maksimalan broj kabela u grupi A (presjek 4) 8 komada, u grupi C (presjek 10) 64 komada, u grupi D (presjek 10) 28 komada, a u grupi F i G (presjek 15) po 8 komada. Grupe B i E su sa zakrivljenim kabelima raspoređenima pored rebara s unutarnje strane sanduka. Grupa B sadrži 24, a grupa E 48 kabela.

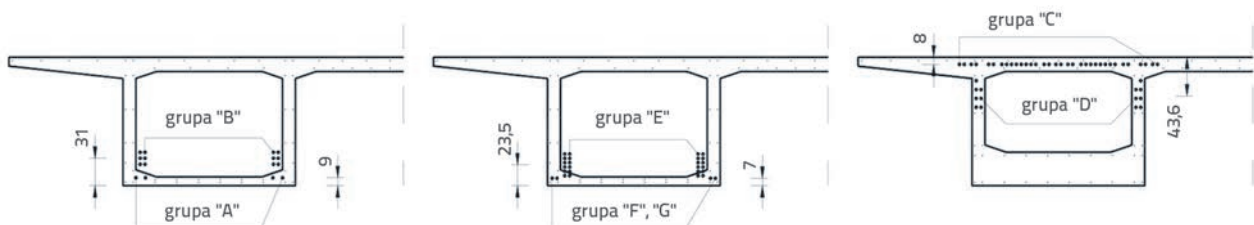


Slika 8. Poprečni presjeci grede u polju i iznad stupova

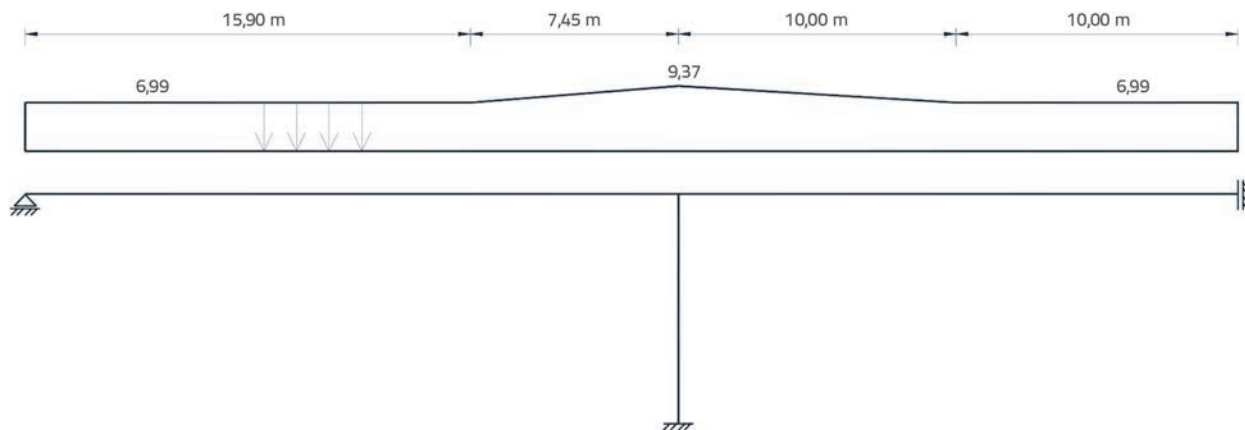
Konstruktivska meka armatura grede po čitavoj je duljini konstantna, a sastoji se od 107 $\phi 10$ i 8 $\phi 14$. Raspored ove armature prikazan je



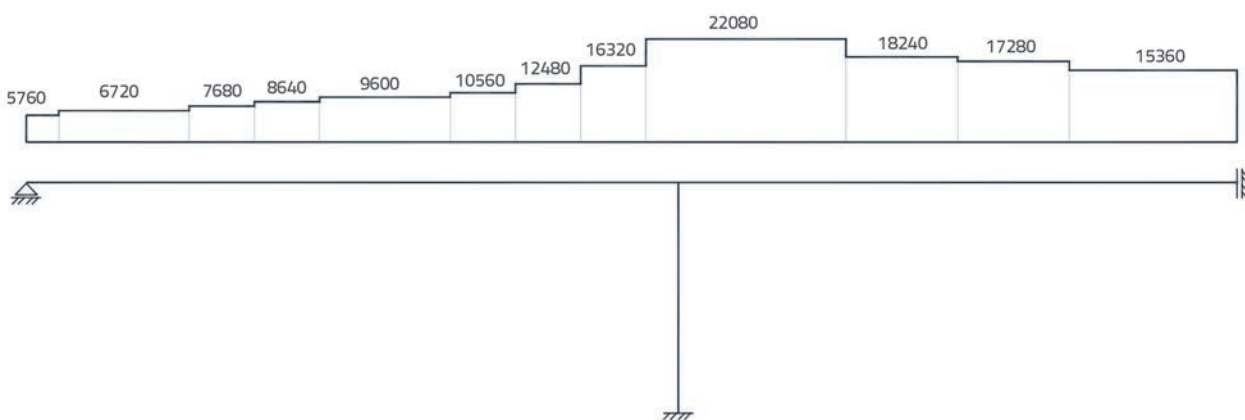
Slika 9. Uzdužni raspored kabela



Slika 10. Raspored armature i kabela u presjecima (a), (b) i (c)



Slika 11. Stalno opterećenje nosača



Slika 12. Raspored sila prednapinjanja

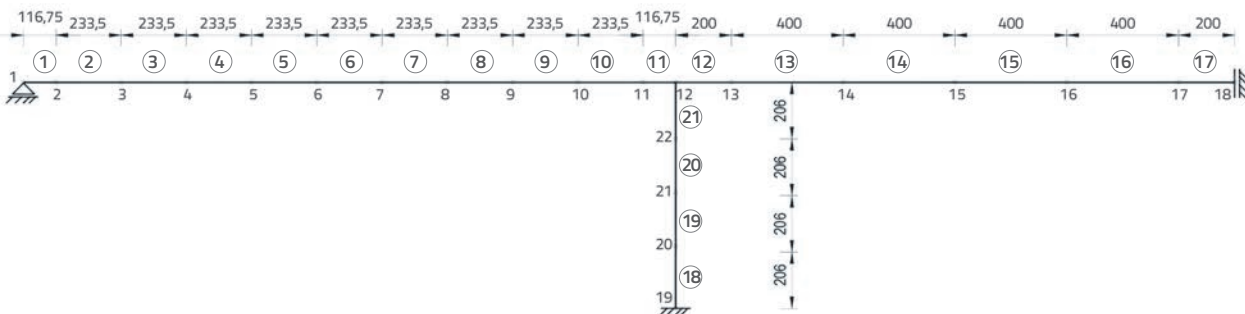
u karakterističnim poprečnim presjecima grede (slika 10.). Stupovi su kružnoga poprečnog presjeka ($\phi 66$ cm) postavljeni ispod svakog sanduka i kruto vezani s gredom i temeljnim stopama. Meka armatura stupova sastoji se od 28 $\phi 20$ u donjem i 44 $\phi 20$ u gornjem dijelu.

Konstrukcija mosta je od betona marke MB45 (C 35/45) s modulom elastičnosti $E_c = 35$ GPa. Za koeficijent puzanja betona dana je vrijednost $\varphi = 2,0$, a za koeficijent skupljanja $\epsilon_n = 2 \times 10^{-4}$. Za prihvaćenu algebarsku vezu metode srednjega naprezanja [2] za koeficijent starenja treba uzeti $\chi = 0,5$. Modul elastičnosti meke armature $E_s = 210$ GPa, dok je modul elastičnosti kabela $E_p = 178,5$ GPa.

Treba napraviti proračun stanja naprezanja i deformacija u konstrukciji mosta zbog djelovanja sljedećih utjecaja:

- a) vlastite težine konstrukcije (slika 11.)
- b) prednapinjanja rasponskoga nosača (slika 12.)
- c) skupljanja betona.

Konstrukcija mosta bit će izvedena tako da u trenutku kada je prednapinjanje kabela završeno i kada u kabelima djeluju proračunom predviđene sile, a prije injektiranja cijevi, konstrukcija bude oslobođena skele. U takvim uvjetima vlastitu težinu konstrukcije primaju presjeci grede bez doprinosa geometrije kabela.



Slika 13. Podjela nosača na konačne elemente

Tablica 1. Podaci o konačnim elementima i njihovim slojevima

Konačni element		1	2	3	4	5	6	7	8	9
beton	A	2,79480	2,79480	2,79480	2,79480	2,79480	2,79480	2,79480	2,89680	3,16880
	I	0,76254	0,76254	0,76254	0,76254	0,76254	0,76254	0,76254	0,83563	0,98569
	Y_T	0,46222	0,46222	0,46222	0,46222	0,46222	0,46222	0,46222	0,49256	0,55918
armatura	A	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963
	I	0,00352	0,00352	0,00352	0,00352	0,00352	0,00352	0,00352	0,00352	0,00337
	Y_T	0,67539	0,67539	0,67539	0,67539	0,67539	0,67539	0,67539	0,67539	0,66300
kabel	A	0,00661	0,00661	0,00661	0,00755	0,00850	0,00944	0,00944	0,01038	0,01227
	I	0,00000	0,00025	0,00007	0,00007	0,00110	0,00173	0,00142	0,00127	0,00042
	Y_T	0,46222	0,87999	1,10286	1,19500	1,05778	0,88800	0,60400	0,39273	0,27192
Konačni element		10	11, 12	13	14	15	16	17	18, 19	20, 21
beton	A	3,44080	3,74680	3,33388	2,96480	2,79480	2,79480	2,79480	0,68424	0,68424
	I	1,08524	1,15438	1,05283	0,87884	0,76254	0,76254	0,76254	0,01863	0,01863
	Y_T	0,60894	0,64935	0,59200	0,51105	0,46222	0,46222	0,46222	0,00000	0,00000
armatura	A	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,00963	0,01759	0,02765
	I	0,00330	0,00320	0,00333	0,00344	0,00352	0,00352	0,00352	0,00059	0,00099
	Y_T	0,65680	0,64637	0,65941	0,66854	0,67539	0,67539	0,67539	0,00000	0,00000
kabel	A	0,01605	0,02171	0,02171	0,01794	0,01699	0,01510	0,01510	0,00000	0,00000
	I	0,00053	0,00062	0,00062	0,00239	0,00204	0,00020	0,00006	0,00000	0,00000
	Y_T	0,22676	0,18848	0,18848	0,48211	0,90778	1,16125	1,25125	0,00000	0,00000

Tablica 2. Razdvojeni primjeri za zadana pojedinačna djelovanja

	Interval vremena		Isključeni dijelovi presjeka u početnom intervalu Δt_1
	$\Delta t_1 = 0$	$\Delta t_2 = \infty$	
Djelovanje utjecaja	Primjer 1a: Vlastita težina konstrukcije	Puzanje betona	Kabeli (za sve konačne elemente)
	Primjer 1b: Prednapinjanje nosača	Puzanje betona	Kabeli (za sve konačne elemente)
	Primjer 1c: Skupljanje betona	Skupljanje betona	

U [2] zadatak je riješen metodom sila, i to pojedinačno za zadana djelovanja. Rješenje je dano uz pretpostavku da je prednapeti čelik elastičan materijal, a za deformacije tečenja betona prihvaćena je algebarska veza metode srednjega naprezanja. To je aproksimativna algebarska veza teorije starenja pri konstantnom modulu elastičnosti betona.

Podjela nosača na konačne elemente i položaj čvorova prikazani su na slici 13. Geometrijski podaci o konačnim elementima i njihovim slojevima prikazani su u tablici 1. Pritom je za fiksnu os svih konačnih elemenata odabran gornji rub kolničke ploče. Za rješenje ovoga primjera, a radi usporedbe rezultata i verifikacije razvijenog modela proračuna, uključujući i verifikaciju računalnog programa, u prvju su varijanti oblikovana tri primjera (tri ulazne datoteke) u skladu sa zadanim utjecajima a), b) i c)

(tablica 2.). Početno vlačno naprezanje u kabelima izračunano je kao $\sigma(t_0) = P/A_p$.

U drugoj varijanti zadatak je rješavan s jednom ulaznom datotekom, jer je prikazani proračunski model poopćen i omogućava da se naprezanja u pojedinim dijelovima (slojevi) presjeka mogu aktivirati u različitim trenucima vremena. Također se bez ograničenja mogu uključiti i sva naknadna djelovanja u skladu s faznim izvođenjem konstrukcije. Pri tome se s pomoću fiktivnih intervala ($\Delta t = 0$) uvode sve skokovite (elastične) promjene. Zbog toga se za promatrani primjer mogu formirati dva ili tri vremenska intervala, ovisno o potrebi razmatranja doprinosa pojedinih utjecaja na promjenu stanja naprezanja i deformacija. I u jednom je i u drugom slučaju zadnji interval konačan, a prvi, odnosno prva dva su fiktivna (tablice 3. i 4.).

Tablica 3. Jedinstven primjer za zadana djelovanja – dva vremenska intervala

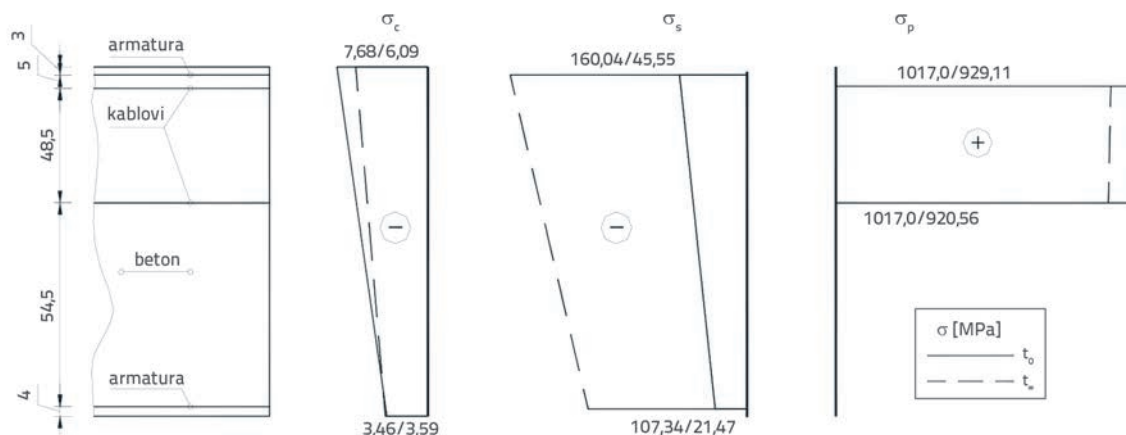
Interval	$\Delta t_1 = 0$	$\Delta t_2 = \infty$
Djelovanje utjecaja	a) Vlastita težina konstrukcije b) Prednapinjanje nosača	c) Skupljanje betona Puzanje betona
Isključeni dijelovi presjeka	Kabli (za sve konačne elemente)	

Tablica 4. Jedinstven primjer za zadana djelovanja – tri vremenska intervala

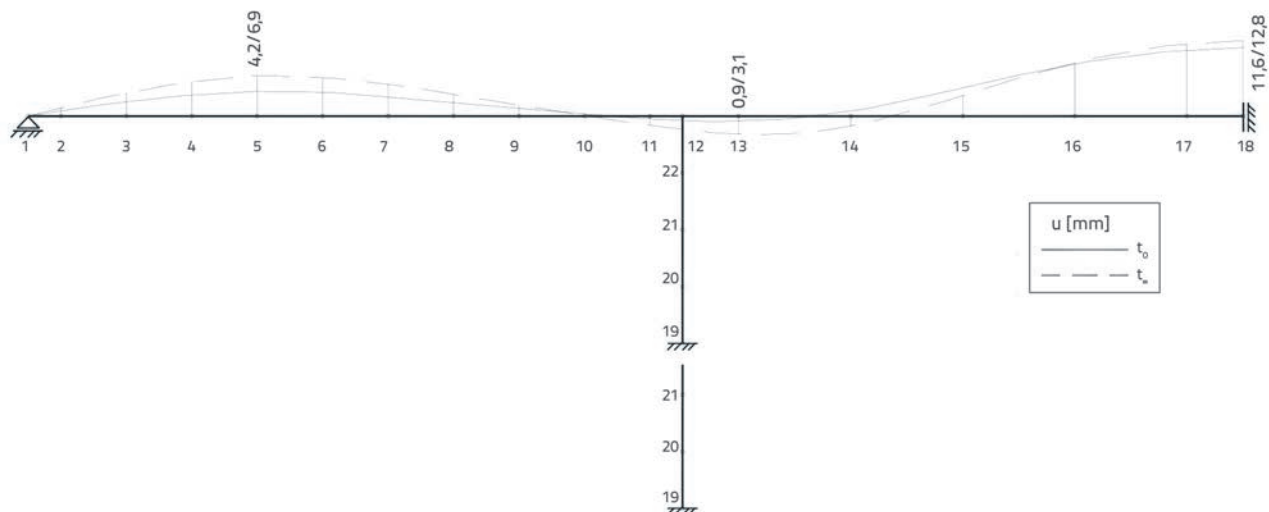
Interval	$\Delta t_1 = 0$	$\Delta t_2 = 0$	$\Delta t_3 = \infty$
Djelovanje utjecaja	b) Prednapinjanje nosača	a) Vlastita težina konstrukcije	c) Skupljanje betona Puzanje betona
Isključeni dijelovi presjeka	Kabli (za sve konačne elemente)	Kabli (za sve konačne elemente)	

U prvom intervalu ($\Delta t_1 = 0$) aktivni su čelični nosač i betonska ploča, jer prednapeti kabli još nisu injektirani i ne čine dio spregnutoga presjeka, dok je sila prednapinjanja uvedena kao vanjsko opterećenje $\sigma(t_0) = P/A_p$. U tom prvom intervalu mogu se uključiti zajedno opterećenja a) i b). U drugom intervalu ($\Delta t_2 = \infty$) obuhvaćene su promjene zbog skupljanja i puzanja betona, a u presjek su uključeni i prednapeti kabli (tablica 3.).

U drugom slučaju, razmotri li se doprinos pojedinačnih utjecaja, prvi i drugi interval su fiktivni ($\Delta t_1 = 0$ i $\Delta t_2 = 0$) i u njima se uvode, redom, opterećenje od prednapinjanja i opterećenje od vlastite težine, a zadnji (treći) interval ima vremensko trajanje ($\Delta t_3 = \infty$) i obuhvaća viskozne deformacije od skupljanja i puzanja betona (tablica 4.). Kao reprezentativni, prikazani su rezultati naprezanja za presjek rasponske grede iznad srednjega oslonca mosta (slika 14.).



Slika 14. Naprezanja u presjeku grede nad srednjim osloncem [MPa]



Slika 15. Progibi uzduž grede

Dobivene vrijednosti nakon izvršenih proračuna za sve varijante su identične, neovisno o tome rješava li se zadatak pojedinačno ili u zajedničkoj datoteci. Usporedbom vrijednosti naprezanja s vrijednostima iz [2] javljaju se minimalna odstupanja, koja su posljedica osrednjavanja geometrije pojedinih konačnih elemenata i približnoga uvođenja sile prednapinjanja u konstrukciju parabolničnim kabelima. Te su razlike manje od 4 % i ne predstavljaju nikakvu prepreku za uspješnu primjenu razvijenoga modela proračuna i kod ovako složenih spregnutih konstrukcija.

Ovaj primjer pokazuje preraspodjelu naprezanja u spregnutim presjecima zbog skupljanja i puzanja betona tijekom vremena. Dok se beton i kabeli rasterećuju, dotle meka armatura preuzima značajan dio naprezanja. Gornja armatura u ovom primjeru dostiže granicu dopuštenih naprezanja za glatki čelik, što je uvećanje za približno 250 % te o takvim promjenama treba voditi računa još u preliminarnim fazama projektiranja. Kada je u pitanju progib rasponske grede (slika 15.), može se utvrditi da je za krajnji trenutak progib u nekim dijelovima grede zbog skupljanja i puzanja betona porastao za više od 60 % u odnosu na početno elastično stanje.

8. Zaključak

Kod proračuna složenih spregnutih konstrukcija vrlo je važno u obzir uzeti doprinos reologije betona i prednapetoga čelika. Ovdje razvijeni postupak po metodi konačnih elemenata, u kojem se uvode uslojeni štapovi i fiktivno opterećenje, omogućava poopćavanje postupka i provođenje proračuna

konstrukcije kao cjelovitog konstrukcijskog sustava, uključujući i statički neodređene konstrukcije, a ne samo promatranjem izdvojenih presjeka.

Tehnološki postupci pri izvođenju konstrukcije, u kojima se naprezanja u pojedinim slojevima aktiviraju u različitim vremenskim intervalima, te promjene opterećenja i sve druge promjene mogu se obuhvatiti prikazanim algoritmom proračuna. Mogu se analizirati složeniji slučajevi, kao što su sve naknadne intervencije zbog pojačavanja i sanacije postojećih konstrukcijskih sustava ili slučajevi isključenja nekih dijelova (npr. zbog korozije armature). Prednost ovoga algoritma ogleda se u primjeni računala i razvoju odgovarajućega softvera za brzo rješavanje primjera iz inženjerske prakse, ali i za potrebe istraživanja u ovom području.

Analizom rezultata prikazanoga numeričkog primjera nameće se zaključak da je pri projektiranju spregnutih konstrukcija nužno uključiti viskoelastična svojstva materijala, jer se naponi i deformacije u elementima s vremenom bitno mijenjaju. Pritisnuti betonski sloj u načelu se rasterećuje, a utjecaje preuzimaju čelični nosač i armatura, dok se dilatacije i zakrivljenosti presjeka tijekom vremena značajnije povećavaju.

Zahvala

U radu je predstavljen dio istraživanja koja se obavljaju u okviru projekta TR36043 koji financira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

LITERATURA

- [1] Pržulj, M.: Spregnute konstrukcije, Građevinska knjiga, Beograd, pp. 354, 1989.
- [2] Đurić, M.: Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija, SANU, Beograd, pp. 183, 1963.
- [3] Sekulović, M.: Metod konačnih elemenata, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [4] Partov, D., Kantchev, V.: Time-dependent analysis of composite steel-concrete beams using integral equation of Volterra, according EUROCODE-4", Engineering Mechanics, 16 (2009) 5, pp. 367-392.
- [5] Folić, R., Zenunović, D.: Spregnute konstrukcije čelik - beton, FTN-Monografije 36, Novi Sad, pp. 362, 2009.
- [6] Folić, R., Radonjanin, V., Malešev, M.: Design and Analysis of Steel-Concrete Composite Structure, Introductory - Invited paper on 6th Greek National Conference on Metal Structures, Athens: Greek Association for Metal Structures, pp. 72-87, 2008.
- [7] Folić, R., Cumbo, A.: Theoretic Bases for Analysis of Viscous Deformations in Composite Beams using the Finite Elements Method, Bulletins for Applied & Computing Mathematics (BAM-1770/2000 XCIII), Budapest, pp. 17-28, 2000.
- [8] Folić, R., Tatomirović, M.: Spregnute betonske konstrukcije – I deo, Građevinski kalendar, Beograd, 31 (1999), pp. 289-386.
- [9] Chiorino, M.A.: Structural effects of time-dependent behaviour of concrete, ICJ The Indian Concrete Journal, Theme: Creep and Shrinkage, Guest Editorial, Maharashtra, India, 86 (2012) 12, pp. 3-6.
- [10] Chiorino, M.A., Carreira, D.J.: Factors affecting creep and shrinkage of hardened concrete and guide for modelling, ICJ The Indian Concrete Journal, Theme: Creep and Shrinkage, A state-of-the-art report on international recommendations and scientific debate, Maharashtra, India, 86 (2012) 12, pp. 11-24.
- [11] Folić, R., Popović, B.: Parcijalno prethodno napregnute konstrukcije, FTN-Monografije, Novi Sad, 27 (2008), pp. 212.
- [12] Lazić, J.: Približna teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [13] Cumbo, A., Folić, R.: Primjena metode konačnih elemenata za analizu uticaja reoloških svojstava na stanje napona i deformacija spregnutih konstrukcija, Građevinski kalendar, 36 (2004), pp. 203-255.