

Model geometrijske nelinearnosti u statičkoj analizi ljusaka

Jure Radnić, Domagoj Matešan, Alen Harapin

Ključne riječi

ljuska,
geometrijska nelinearnost,
numerički model,
model materijala,
statička analiza,
eksperiment riječi

Key words

shell,
geometric nonlinearity,
numerical model,
model of materials,
statical analysis,
experiment

Mots clés

voile,
non-linéarité
géométrique,
modèle numérique,
modèle de matériau,
analyse statique,
essai

Ключевые слова

опалубка,
геометрическая
нелинейность,
числовая модель,
модель материала,
статический анализ,
эксперимент

Schlüsselworte:

Schale,
geometrische Unlinearität,
numerisches Modell,
Modell des Materials,
statische Analyse,
Experiment

J. Radnić, D. Matešan, A. Harapin

Izvorni znanstveni rad

Model geometrijske nelinearnosti u statičkoj analizi ljusaka

Opisan je i prikazan model geometrijske nelinearnosti pri statičkoj analizi ljusaka. U proračunski model uključeni su utjecaji velikih pomaka i malih deformacija. Primjenom takvog modela moguće je istovremeno uključenje geometrijske i materijalne nelinearnosti konstrukcije. Pri proračunima su upotrijebljeni elementi degenerirane zakrivljene ljuske. Numerički model za simulaciju geometrijske nelinearnosti ljusaka testiran je eksperimentalnim ispitivanjem vitke čelične konzole.

J. Radnić, D. Matešan, A. Harapin

Original scientific paper

Geometrical nonlinearity model in statical analysis of shells

The geometrical nonlinearity model in statical analysis of shells is described and presented. Influences of great displacements and small deformations are taken into account in the calculation model. This model enables simultaneous analysis of geometrical and material nonlinearity of structures. Elements of a degenerated curved shell are used in calculations. The numerical model for simulation of the geometrical nonlinearity of shells was checked by experimental testing of a slender steel cantilever.

J. Radnić, D. Matešan, A. Harapin

Ouvrage scientifique original

Modèle de non-linéarité géométrique dans l'analyse statique des voiles

L'article décrit et présente un modèle de non-linéarité géométrique lors de l'analyse statique des voiles. Le modèle de calcul prend en compte les effets des grands déplacements et des petites déformations. La mise en œuvre d'un tel modèle permet la prise en compte simultanée de la non-linéarité géométrique et matérielle d'une construction. Des éléments d'un voile courbé dégénéré ont été utilisés dans les calculs. Le modèle numérique de simulation de la non-linéarité géométrique a été testé par un essai expérimental d'un porte-à-faux métallique mince.

Ї. Раднич, Д. Матешан, А. Харарпин

Оригинальная научная работа

Модель геометрической нелинейности в статическом анализе опалубок

В работе описана и показана модель геометрической нелинейности при статическом анализе опалубок. В расчётную модель включены влияния больших сдвигов и малых деформаций. Применение такой модели даёт возможность одновременного включения геометрической и материальной нелинейности конструкции. При расчётах применялись элементы дегенерированной искривлённой опалубки. Числовая модель для воспроизведения геометрической нелинейности опалубок тестирована экспериментальным испытанием гибкой стальной консоли.

J. Radnić, D. Matešan, A. Harapin

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Modell der geometrischen Unlinearität in der statischen Analyse von Schalen

Beschrieben und dargestellt ist ein Modell der geometrischen Unlinearität bei der statischen Analyse von Schalen. In das Berechnungsmodell sind die Einflüsse grosser Verschiebungen und kleiner Deformationen eingeschlossen. Durch Anwendung eines solchen Modells ist es möglich die geometrische und materielle Unlinearität der Konstruktion gleichzeitig einzuschliessen. Bei den Berechnungen benützte man Elemente der degenerierten gekrümmten Schale. Das numerische Modell für die Simulierung der geometrischen Unlinearität der Schalen ist durch die experimentale Prüfung einer schlanken Stahlkonsole testiert.

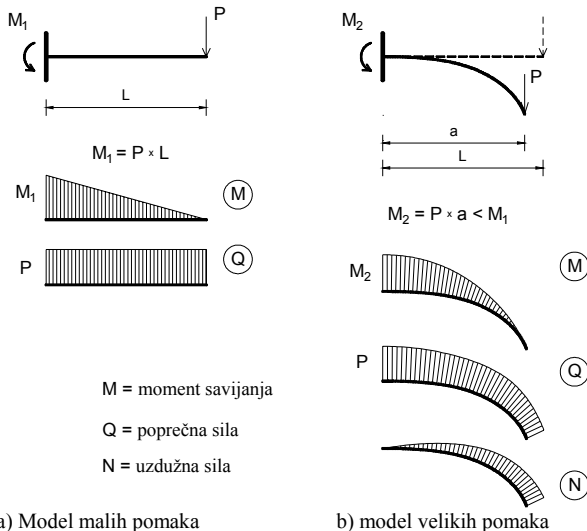
Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radnić**; dr. sc. **Alen Harapin**, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu; dr. sc. **Domagoj Matešan**, Institutu građevinarstva Hrvatske, Poslovni centar Split, Matice hrvatske 15

1 Općenito

Geometrijska nelinearnost konstrukcije posljedica je:

1. utjecaja promjene njezine geometrije (pomicanja/progibanja) te
2. nelinearne veze između deformacija i pomaka.

Tzv. linearni model geometrije ne uzima u obzir utjecaj promjene geometrije konstrukcije. Naime, u ovom se modelu jednadžbe ravnoteže zadovoljavaju na nedeformiranom (početnom) sustavu. Takav je pristup prihvatljiv za krute konstrukcije kod kojih su pomaci sustava mali (eng. *small displacements problem*). Kad su pomaci konstrukcije veliki (eng. *large displacements problem*), jednadžbe ravnoteže potrebno je zadovoljiti na deformiranom sustavu jer primjena linearnog modela geometrije tada daje pogrešne rezultate. Primjer utjecaja odabira modela geometrije na neke rezultate proračuna konzole prikazan je na slici 1.



Slika 1. Primjer utjecaja modela geometrije na neke rezultate proračuna konzole

Primjena modela malih pomaka pri proračunu vitkih konstrukcija može rezultirati pogrešnim zaključcima glede njihove nosivosti i sigurnosti. Kadšto su na strani manje sigurnosti (pretežu li tlačne uzdužne sile), a kadšto na strani veće sigurnosti (pretežu li vlačne uzdužne sile). U nekim je slučajevima linearni model geometrije neupotrebljiv, pa je nužna upotreba modela velikih pomaka.

Linearna veza između deformacija i pomaka prihvatljiva je za probleme s malim deformacijama (eng. *small strains problem*). Za probleme s velikim deformacijama (eng. *large strains problem*), potrebno je koristiti se nelinearnom vezdomu deformacija-pomak. U analizi betonskih i čeličnih konstrukcija, kod kojih su uporabne i lomne deformacije relativno male (nekoliko promila), dostatno je primijeniti linearnu vezu deformacija-pomak.

U ovom je radu prikazan model geometrijske nelinearnosti za probleme s velikim pomacima i malim deformacijama (eng. *large displacements, small strains problem*), u okviru statičke analize ljsusaka. Pri tome je moguća istovremena uporaba nelinearnih modela materijala. Zapravo, prikazan je model geometrijske nelinearnosti u okviru prethodno razvijenog modela za nelinearnu statičku analizu betonskih ljsusaka [1, 2]. Izloženi je model geometrijske nelinearnosti testiran na numeričkoj simulaciji dvaju eksperimentalnih testova s vrlo izraženim pomacima konstrukcije.

2 Postupak uključivanja geometrijske nelinearnosti

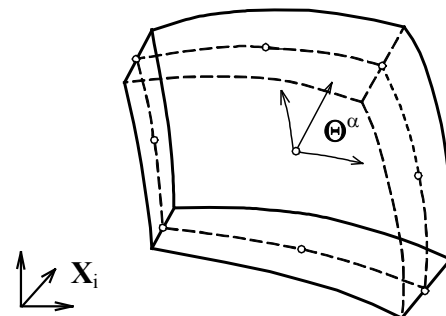
Za rješenje problema uporabljen je tzv. ažurirani Lagrangeov postupak (eng. *update Lagrangian procedure*), koji se temelji na sljedećim polazištima [3]:

1. Vanjsko se opterećenje aplicira u inkrementima. Za svaki se inkrement provodi iteracijski postupak proračuna sve dok vektor neuravnoteženih sila ne bude po volji malen. Nakon što je zadovoljen kriterij konvergencije, vektor neuravnoteženih sila pridodaje se idućem inkrementu vanjskog opterećenja i iteracijski postupak se ponovno nastavlja.
2. U okviru svakog iteracijskog koraka rabi se klasični Lagrangeov postupak: stanje varijabli se definira u odnosu prema stanju na početku promatranog iteracijskog koraka.
3. Na kraju svakog iteracijskog koraka, stanje varijabli se ažurira (redefinira) u odnosu prema stanju na kraju promatranog iteracijskog koraka.

Prvo će se razmotriti stanje na početku promatranoga iteracijskog koraka. U Lagrangeovom opisu, prostorni položaj tijela izražen u Cartesijevu koordinatnom sustavu X_i definiran je izrazom:

$$X_i = X_i(\Theta^\alpha) \tag{1}$$

gdje je materijalna točka tijela jedinstveno definirana u pridruženom krivolinijskom koordinatnom sustavu Θ^α (slika 2.).



Slika 2. Prostorni (X_i) i materijalni (Θ^α) koordinatni sustav

Ravnoteža tijela izražava se jednadžbom virtualnog rada s komponentama u Cartesijevu koordinatnom sustavu:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_S \mathbf{q}_i \delta \mathbf{u}_i dS \quad (2a)$$

ili alternativno s komponentama u pridruženom krivolinijskom koordinatnom sustavu:

$$\int_V \sigma^{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} dV = \int_S \mathbf{q}_i \delta \mathbf{u}_i dS \quad (2b)$$

U gornjim izrazima su σ_{ij} i $\sigma^{\alpha\beta}$ Cauchyovo naprezanje, $\delta \epsilon_{ij}$ i $\delta \epsilon_{\alpha\beta}$ mali prirast (inkrement) deformacije, V volumen tijela i S ploha tijela. Radi kratkoće zapisa, uzeto je samo površinsko opterećenje \mathbf{q}_i .

Kako se u izrazu (2b) integracija obavlja preko tekućeg stanja tijela, kontravarijantne komponente Cauchyeva naprezanja $\sigma^{\alpha\beta}$ jednake su kontravarijantnim komponentama drugog Piola-Kirchhoff naprezanja $\mathbf{S}^{\alpha\beta}$. Kovarijantne komponente prirasta deformacija $\delta \epsilon_{\alpha\beta}$ povezane su s Cartesijevim komponentama prirasta pomaka $\delta \mathbf{u}$ preko:

$$\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{k,\alpha} \delta \mathbf{u}_{k,\beta} + \mathbf{X}_{k,\beta} \delta \mathbf{u}_{k,\alpha}) \quad (3)$$

Koristeći se simetrijom $\sigma^{\alpha\beta}$, jednadžba virtualnog rada može se napisati u obliku:

$$\int_V \mathbf{S}^{\alpha\beta} \mathbf{X}_{k,\alpha} \delta \mathbf{u}_{k,\beta} dV = \int_S \mathbf{q}_i \delta \mathbf{u}_i dS \quad (4)$$

Na kraju promatranoga iteracijskog koraka, prostorni položaj tijela \mathbf{x}_i opisan je sa:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\Theta^\alpha) = \mathbf{x}_i(\Theta^\alpha) + \Delta \mathbf{u}_i(\Theta^\alpha) \quad (5)$$

gdje je, kako je već rečeno, \mathbf{x}_i prostorni položaj točke tijela na početku promatranoga iteracijskog koraka, a $\Delta \mathbf{u}_i$ inkrement pomaka.

Jednadžba virtualnog rada na kraju promatranog iteracijskog koraka ima oblik:

$$\int_V (\mathbf{S}^{\alpha\beta} + \Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta}) \delta \mathbf{E}_{\alpha\beta} dV = \int_S (\mathbf{q}_i + \Delta \mathbf{q}_i) \delta \mathbf{u}_i dS \quad (6)$$

gdje $\delta \mathbf{E}_{\alpha\beta}$ označava prirast Greenovih (Lagrangeovih) deformacija, koji se može izračunati iz prirasta pomaka s pomoću:

$$\delta \mathbf{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(\mathbf{X}_{k,\alpha} + \Delta \mathbf{u}_{k,\alpha}) \delta \mathbf{u}_{k,\beta} + (\mathbf{X}_{k,\beta} + \Delta \mathbf{u}_{k,\beta}) \delta \mathbf{u}_{k,\alpha}] \quad (7)$$

Treba napomenuti da se integracija u izrazu (6) obavlja u odnosu na stanje tijela na početku iteracijskog koraka i $\Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta}$ je inkrement drugog Piola-Kirchhoff naprezanja.

Koristeći se simetrijom $\mathbf{S}^{\alpha\beta}$ i $\Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta}$, jednadžba ravnoteže u funkciji pomaka ima oblik:

$$\int_V (\mathbf{S}^{\alpha\beta} + \Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta}) (\mathbf{X}_{k,\alpha} + \Delta \mathbf{u}_{k,\alpha}) \delta \mathbf{u}_{k,\beta} dV = \int_S (\mathbf{q}_i + \Delta \mathbf{q}_i) \delta \mathbf{u}_i dS \quad (8)$$

Integracija u (4) i (8) provodi se prema istom stanju tijela.

Kraćenjem jednadžbe (8), dobiva se jednadžba inkrementalnoga virtualnog rada koja se također označava kao jednadžba neprekinute (kontinuirane) ravnoteže:

$$\int_V (\Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta} \mathbf{X}_{k,\alpha} + \mathbf{S}^{\alpha\beta} \Delta \mathbf{u}_{k,\alpha} + \Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta} \Delta \mathbf{u}_{k,\alpha}) \delta \mathbf{u}_{k,\beta} dV = \int_S \Delta \mathbf{q}_i \delta \mathbf{u}_i dS \quad (9)$$

Prirast naprezanja, odnosno tekući konstitutivni model materijala, može se napisati u obliku:

$$\Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta} = \mathbf{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} \Delta \mathbf{E}_{\gamma\delta} \quad (10)$$

gdje $\mathbf{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ označava tekuću funkcijsku vezu između prirasta naprezanja $\Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta}$ i prirasta deformacija $\Delta \mathbf{E}_{\gamma\delta}$. Inkrement Greenovih deformacija može se izračunati iz prirasta pomaka s pomoću:

$$\Delta \mathbf{E}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{k,\gamma} \Delta \mathbf{u}_{k,\delta} + \mathbf{X}_{k,\delta} \Delta \mathbf{u}_{k,\gamma} + \Delta \mathbf{u}_{k,\gamma} \Delta \mathbf{u}_{k,\delta}) \quad (11)$$

Budući da je $\mathbf{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ simetričan u odnosu na dva posljednja indeksa, kombinacija (10) i (11) vodi u izraz za proračun inkremenata naprezanja u funkciji inkremenata pomaka:

$$\Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta} = \mathbf{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\mathbf{X}_{k,\gamma} \Delta \mathbf{u}_{k,\delta} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_{k,\gamma} \Delta \mathbf{u}_{k,\delta}) \quad (12)$$

Izrazi (9) i (12) temeljne su jednadžbe promatranoga iteracijskog koraka. Ako je koordinatni sustav Cartesijev, (9) i (12) pojednostavljuju se na:

$$\int_V (\Delta \mathbf{S}_{ij} \delta_{ki} + \mathbf{S}_{ij} \Delta \mathbf{u}_{k,i} + \Delta \mathbf{S}_{ij} \Delta \mathbf{u}_{k,i}) \delta \mathbf{u}_{k,j} dV = \int_S \Delta \mathbf{q}_i \delta \mathbf{u}_i dS \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{S}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} (\Delta \mathbf{u}_{k,l} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_{m,k} \Delta \mathbf{u}_{m,l}) \quad (14)$$

gdje je δ_{ki} Kronecherov simbol.

Na kraju tekućega iteracijskog koraka potrebno je ažurirati stanje varijabli. Pri tome se razlikuje formulacija preko općega krivolinijskoga koordinatnog sustava i pridruženoga koordinatnog sustava koji je Cartesijev koordinatni sustav na početku iteracijskog koraka.

Za zakrivljeni sustav, kontravarijantne komponente drugog naprezanja Piola-Kirchhoff treba korigirati za promjene volumena kako bi postale kontravarijantne komponente Cauchyeva naprezanja, tj.:

$$\sigma^{\alpha\beta} = (\mathbf{S}^{\alpha\beta} + \Delta \mathbf{S}^{\alpha\beta}) / \mathbf{J} \quad (15)$$

gdje je \mathbf{J} jakobiana inkrementa deformacije. Ako je materijal približno nestišljiv, transformacija nije potrebna.

U početnom Cartesijevu pristupu, drugo Piola-Kirchhoff naprezanje treba transformirati u stvarno (Cauchyovo) naprezanje u Cartesijevu koordinatnom sustavu:

$$\sigma_{ij} = (\delta_{ik} + \Delta u_{i,k})(S_{kl} + \Delta S_{kl})(\delta_{jl} + \Delta u_{j,l})/J \quad (16)$$

Pritom opet jakobiana treba biti jednaka jedinici ako je materijal približno nestišljiv.

U modelu za statičku analizu ljsusaka [1], [2] uključen je model geometrijske nelinearnosti s velikim pomacima i malim deformacijama. Kao što je prethodno prikazano, utjecaj velikih pomaka obuhvaćen je transformacijama komponenata pomaka i sila (naprezanja) između globalnoga i lokalnoga koordinatnog sustava. Naime, uz pretpostavku da je prirast pomaka unutar svakoga iteracijskog koraka malen, može se usvojiti da postoji linearna ovisnost između deformacija i pomaka. Na ovaj se način proračun značajno pojednostavljuje i skraćuje. Primjena lokalnoga koordinatnog sustava za definiranje konstitutivnog zakona materijala također pojednostavljuje analizu za slučajeve s anizotropnim svojstvima materijala.

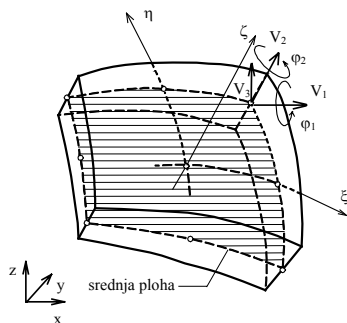
Konkretno, u svakom iteracijskom koraku traženja rješenja problema rješava se sustav:

$$\mathbf{K}^{n-1} \Delta \mathbf{u}^n = \mathbf{R}^n - \mathbf{F}^{n-1} \quad (17)$$

u kojemu n označava promatrani iteracijski korak; \mathbf{K} označava tekuću matricu krutosti konstrukcije koja može uključivati materijalnu nelinearnost (s različitim modelima materijala) i geometrijsku nelinearnost (velike pomake, male deformacije); $\Delta \mathbf{u}$ označava tekući prirast pomaka; \mathbf{R} označava tekući vektor vanjskih čvornih sila i \mathbf{F} označava tekući vektor unutrašnjih čvornih sila zbog naprezanja materijala. Iteracijski postupak se nastavlja sve dok vektor neuravnoteženih sila ($\mathbf{R}^n - \mathbf{F}^{n-1}$) ne bude po volji dovoljno mali. Potom se vektor neuravnoteženih sila pridodaje novom inkrementu vanjskog opterećenja i iteracijski postupak se ponovno ponavlja.

3 Prostorni model i konačni elementi

Razmatran je problem geometrijske nelinearnosti ljsusaka, koje su simulirane 8-čvornim i 9-čvornim zakrivljenim degeneriranim konačnim elementima (slika 3.).



Slika 3. Usvojeni element degenerirane zakrivljene ljsuske [4]

Elementi su oslobođeni posmičnog i membranskog ukrućenja [4]. Svaki čvor ima pet nepoznanica: tri pomaka i dvije rotacije okomito na srednju plohu ljsuske. Detaljniji prikaz usvojenih elemenata može se naći u [1, 2, 4] i ovdje ga nećemo ponavljati.

4 Model materijala

Osim uključivanja geometrijske nelinearnosti (veliki pomaci), moguća je i simulacija materijalne nelinearnosti. Moguća je uporaba klasičnoga elastičnoga, elastoplastičnog i elastokrtnog modela materijala te specijalnog modela armiranog betona. Primjenjuje se uslojeni model po debljini ljsuske. Detaljni opis mogućih modela materijala može se naći u [1, 2] i ovdje se neće ponavljati.

5 Još neki proračunski aspekti

Za rješenje sustava nelinearnih jednadžbi rabi se metoda Newton-Raphson. Pri tome su u računalni program uključene sljedeće mogućnosti ažuriranja matrice krutosti:

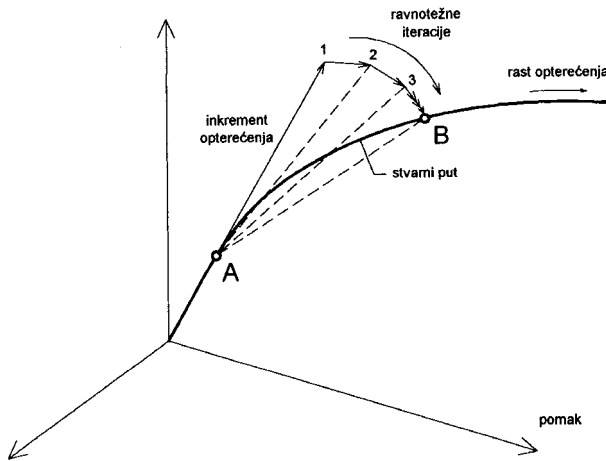
- samo na početku proračuna
- na početku svakog inkrementa opterećenja
- na početku svakog iteracijskog koraka svakoga inkrementa opterećenja te
- u definiranim inkrementima opterećenja i definiranim iteracijskim koracima.

Ova se metoda pokazala efikasnom pri rješavanju problema prikazanih u točki 6. pri čemu su pomaci konstrukcije bili vrlo veliki. Ipak, moguće je da ova metoda ne daje rješenje u određenim slučajevima s vrlo izraženom promjenom geometrije.

Kao što je već navedeno, vanjsko opterećenje zadaje se u inkrementima. Bez obzira na to radi li se o problemima s čistom geometrijskom nelinearnosti ili istodobnom geometrijskom i materijalnom nelinearnosti, veličina inkrementa opterećenja utječe na dobivene rezultate. Taj je utjecaj to značajniji što je stupanj nelinearnosti veći. Slika 4. shematski prikazuje tipični iteracijski postupak traženja rješenja za neki inkrement opterećenja. Prikaz je dan u 3D prostoru, pri čem treba imati na umu da se u stvarnoj konstrukciji rješenje zbiva u višedimenzionalnom prostoru koji odgovara broju stupnjeva slobode diskretiziranog sustava.

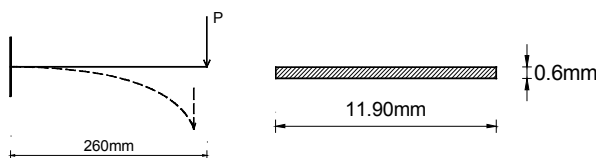
Treba uočiti razliku između računskog puta traženja rješenja $A - 1 - 2 - 3 \dots B$ i stvarnog puta rješenja $A - B$. Pritom treba imati na umu da točan put rješenja i nije poznat, odnosno da rješenje u zadnjem iteracijskom koraku ne leži egzaktno u točki B (prisutne su uvijek određene pogreške u ovisnosti o odabranom kriteriju konvergencije). "Zaobilaznja" stvarnog puta mogu proizvesti

prividne nelinearnosti modela ili nepostojeće geometrijske nelinearnosti. Stoga je potrebno uzeti dostatno male inkremente opterećenja, a što ovisi o razmatranom problemu. Uglavnom, manji inkrementi opterećenja trebali bi dati točnije rezultate. Pri tome premali inkrementi opterećenja mogu ponekad ne samo nepotrebno produžiti analizu već i smanjiti točnost rješenja zbog velikog opsega numeričkih proračuna. Poželjno je istražiti utjecaj duljine inkremenata opterećenja na dobivene rezultate za svaki analizirani primjer.



Slika 4. Kvalitativni prikaz inkrementalno-iterativnog postupka rješenja

Kao što je prethodno navedeno, usvojeni kriterij konvergencije direktno utječe na dobivene rezultate. Stoga pri izboru kriterija konvergencije treba biti oprezan. Za kontrolu konvergencije postupaka, praćena je norma prirasta pomaka u promatranom iteracijskom koraku u odnosu na ukupne tekuće pomake. Prevelika dopustiva tolerancija, koja je dobro došla radi skraćivanja trajanja analize, često može proizvesti potpuno različito računsko stanje od stvarnog ponašanja konstrukcije. Redovito manja dopustiva tolerancija, koja ima za posljedicu duže trajanje analize, trebala bi dati točnije rezultate. Međutim, premala dopustiva tolerancija može izazvati značajne numeričke pogreške i veća odstupanja računskih i stvarnih rezultata. Stoga je i ovdje potrebno provesti više proračuna s različitim vrijednostima dopustive tolerancije.



(i) Dispozicija horizontalne konzole

(ii) Poprečni presjek konzole

Slika 5. Osnovni podaci eksperimentalno ispitane konzole u primjeru 1.

6 Testiranje modela

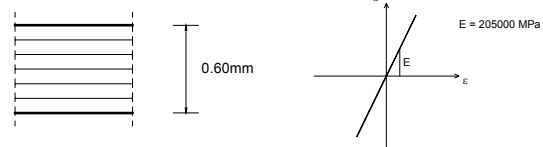
Radi testiranja prikazanoga numeričkog modela za simulaciju geometrijske nelinearnosti ljusaka, analizirane su dvije eksperimentalno ispitane vitke čelične konzole. U primjeru 1. razmatrana je klasična horizontalna konzola opterećena na savijanje, a u primjeru 2. vertikalna konzola opterećena na tlak. Uzeti su pojednostavljeni primjeri s elastičnim modelom materijala, radi lakše provedbe eksperimentalnih testova.

6.1 Primjer 1.

Prvo su eksperimentalno utvrđeni progibi vrlo vitke konzole (vitkost ~ 2880) pod monotono rastućim statičkim opterećenjem, čiji su osnovni podaci prikazani na slici 5. Konzola je izrađena od visokokvalitetnog čelika, s potpunim linearno elastičnim ponašanjem i za najveće intenzitete apliciranog opterećenja. Sila P je gravitacijskog tipa. Aplicirana je na kraju konzole i zadržava početni smjer za vrijeme njezinog deformiranja. Eksperimentalno utvrđeni deformirani oblik konzole za pojedine intenzitete sile prikazan je na slici 7. Sila je sukcesivno povećavana za približno jednaki iznos (izmjereno na preciznoj vagi).



(i) Diskretizacija konzole (tlocrt)



(ii) Diskretizacija po visini presjeka

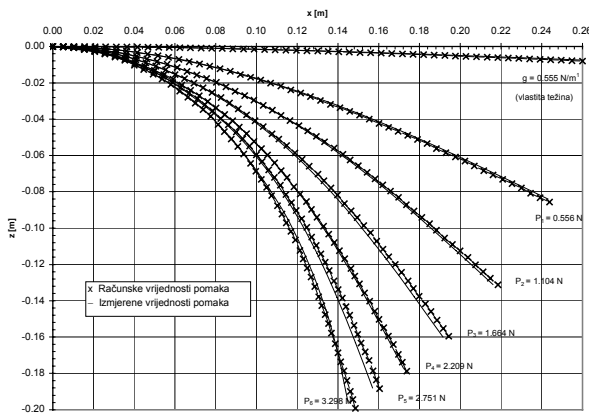
(iii) Jednodimenzionalni prikaz usvojenog modela materijala

Slika 6. Osnovni podaci usvojenog numeričkog modela konzole

Može se uočiti da je progib konzole vrlo velik i od same vlastite težine, odnosno nekoliko je puta veći od visine presjeka. Također je uočljivo da se konzola postupno ukrućuje s porastom sile. Naime, za isti prirast sile po-

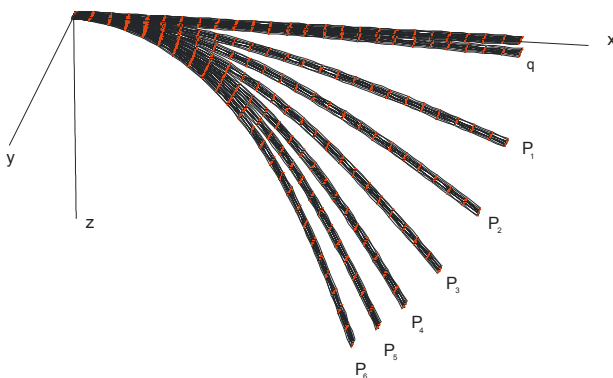
$E_s = 205000 \text{ MPa}$...	modul elastičnosti
$\gamma_s = 7900 \text{ kg/m}^3$...	volumenska masa
$\nu_s = 0.3$...	Poissonov koeficijent

(iii) Podaci o materijalu



Slika 7. Progibi horizontalne konzole pod opterećenjem – prikaz u vertikalnoj ravni

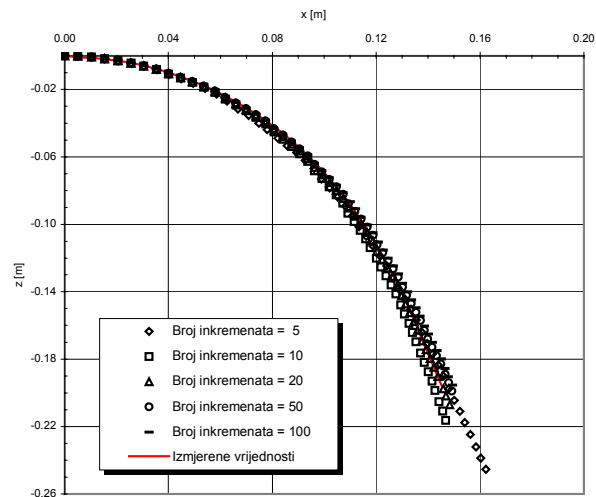
maci konzole se smanjuju. To je posljedica sve izraženijega membranskoga (vlačnog) nošenja deformirane konstrukcije. Intenzitet opterećenja (deformacija) je ograničen, kako bi se osiguralo potpuno elastično ponašanje konstrukcije. Nakon rasterećenja konzole, nisu ostale nikakve nepovratne (plastične) deformacije.



Slika 8. Računski progibi horizontalne konzole pod opterećenjem – prostorni prikaz

Osnovni podaci usvojenoga numeričkog modela prikazani su na slici 6. Nakon proračuna početnoga deformiranog stanja od vlastite težine, sila je nanošena u inkrementima veličine $0,10 P$. Primijenjena je metoda početne krutosti za rješenje nelinearnog problema, uz dopuštenu toleranciju od $0,001$. Usporedba računskih i izmjerenih pomaka konzole također je prikazana na slici 7. Može se uočiti dobro podudaranje eksperimentalno utvrđenih i računskih pomaka konzole. Kako usvojeni numerički model ne uključuje velike deformacije već samo velike pomake, očito je da je ovdje dominantan utjecaj velikih pomaka a utjecaj velikih deformacija zanemariv. Prostorni prikaz računskih pomaka konzole prikazan je na slici 8.

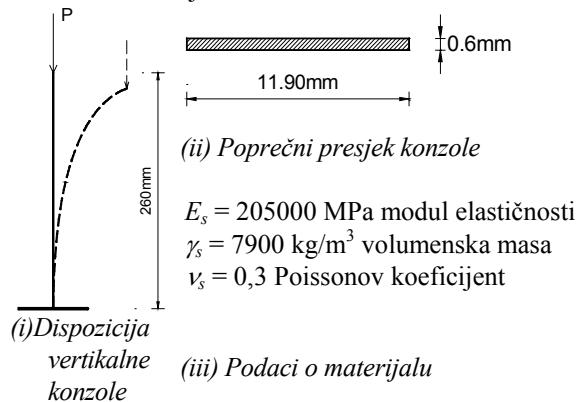
Istražen je utjecaj veličine računskih inkremenata opterećenja na dobivene rezultate za $P = 3.298 \text{ N}$ (slika 9.).



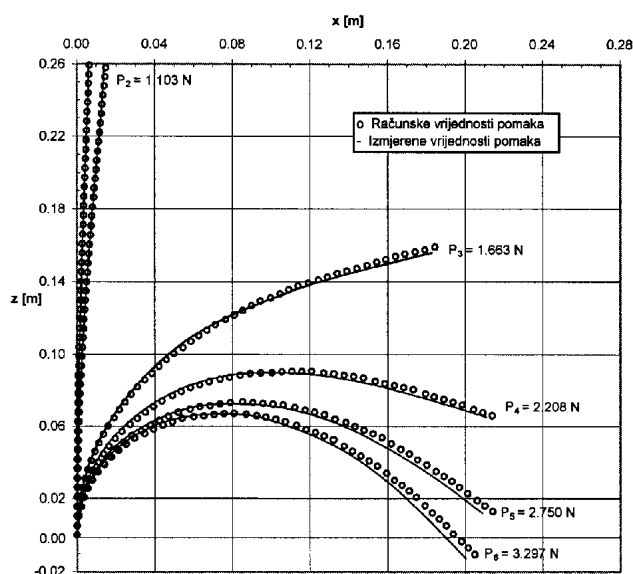
Slika 9. Utjecaj veličine inkrementa sile P na računске pomake konzole ($P = 3.298 \text{ N}$)

6.2 Primjer 2.

Konzola iz primjera 1. postavljena je u približno vertikalni položaj, s otklonom vrha od 0.008 m u odnosu na uklješteni donji rub (početna imperfekcija). Potom je opterećivana različitim intenzitetima vertikalne gravitacijske sile P na vrhu, kao i u primjeru 1. (slika 10.). Usporedba računskih i izmjerenih pomaka konzole prikazana je na slici 11. Može se uočiti da su pomaci vertikalne konzole relativno mali za manje intenzitete opterećenja. Prekoračenjem "kritičnog" opterećenja, dolazi do drastičnog povećanja pomaka i promjene geometrije nosivog sustava. Pojavom membranskoga (vlačnog) nošenja, sustav se potom postupno ukružuje. Naime, uz približno isti prirast opterećenja, smanjuje se prirast pomaka konstrukcije. I ovdje je ograničen intenzitet opterećenja radi osiguranja elastičnog ponašanja materijala (uklanjanjem sile P nisu ostale nikakve nepovratne deformacije). Može se zapaziti da su pomaci vertikalne konzole, za veće intenzitete sile P , znatno veći nego kod horizontalne konzole za iste vrijednosti sile.



Slika 10. Osnovni podaci eksperimentalno ispitane vertikalne konzole u primjeru 2.

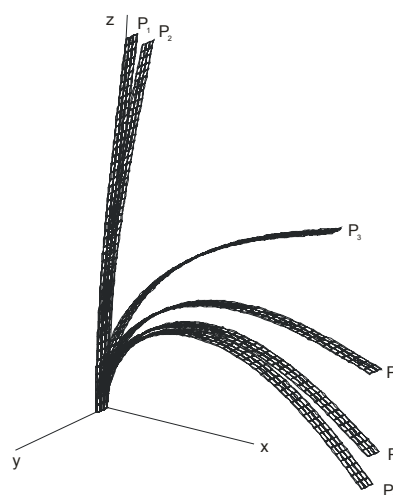


Slika 11. Progibi vertikalne konzole pod opterećenjem – prikaz u vertikalnoj ravnini

Numerički model konstrukcije usvojen je analogno onomu za primjer 1., pri čemu je sila P također nanošena u jednakim inkrementima. Može se također uočiti vrlo dobro slaganje eksperimentalno utvrđenih i računskih pomaka konstrukcije na slici 11. čak i kada su pomaci veći od visine konzole. Prostorni prikaz računskih pomaka vertikalne konzole prikazan je na slici 12.

LITERATURA

- [1] Radnić, J.; Matešan, D.; Harapin, A.: *Model for Static Analyses of Concrete Shells*, Engineering Modelling, Vol. 13 (2000) 3-4, 93-99.
- [2] Radnić, J.; Harapin, A.; Matešan, D.: *Statička i dinamička analiza betonskih ljusaka*, Građevinar, Vol. 53 (2001), 11, 695-709.
- [3] Nagtegaal, J.C.; De Jong, J.E.: Some Computational Aspects of Elasto-plastic Large Strain Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17 (1981), 17, 15-41.
- [4] Huang, H. C.: *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Springer-Verlag, 1989.
- [5] Figueiras, J.A.; Owen, D.R.J.: *Analysis of Elasto-Plastic and Geometrically Non-Linear Anisotropic Plates and Shell in Finite Element Software for Plates and Shells*, Hinton, E.; Owen, D.R.J. (Eds.), Pineridge Press, 1984.



Slika 12. Računski progibi vertikalne konzole pod opterećenjem – prostorni prikaz

7 Zaključak

Uključenje utjecaja promjene geometrije kod vrlo vitkih konstrukcija je nužno jer linearni model geometrije u takvim slučajevima daje pogrešne rezultate ili može biti neupotrebljiv. Vjeruje se da izloženi model može biti od koristi kod analize svih vitkih konstrukcija koje se dovoljno dobro mogu opisati elementima ljuske. Model je osobito koristan za simulaciju problema s istodobnom materijalnom i geometrijskom nelinearnosti.